1 Iloczyn tensorowy

Niech R będzie pierścieniem przemiennym, zaś M i N będą R-modułami. Powiemy że moduł V jest iloczynem tensorowym modułów M i N (co oznaczamy pisząc $V = M \otimes N$) jeśli zadana jest operacja dwuliniowa oznaczana przez $\otimes$ z $M \times N$ w V mająca następującą własność: jeśli η jest operacją dwuliniową z $M \times N$ w pewien R-moduł W to istnieje dokładnie jedna operacja liniowa ϕ z V w W taka że

$$\eta(m,n) = \phi(m \otimes n).$$

Zauważmy najpierw że z definicji wyżej wynika że jeśli produkt tensorowy istnieje to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Mianowicie, jeśli V_1 z $\otimes_1$ oraz V_2 z $\otimes_2$ są dwoma różnymi produktami tensorowymi to na mocy własności definicyjnej istnieją jednyne odwzorowania liniowe ϕ_1 i ϕ_2 takie że

$$m \otimes_2 n = \phi_1(m \otimes_1 n)$$

i

$$m \otimes_1 n = \phi_2(m \otimes_2 n)$$

Wtedy

$$m \otimes_1 n = \phi_2(\phi_1(m \otimes_1 n)).$$

Lecz na mocy definicji istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe mające własność wyżej czyli $\phi_2\phi_1$ to identyczność. Podobnie $\phi_1\phi_2$ to identyczność, czyli V_1 jest izomorficzne z V_2.

Lemat 1.1 *Produkt tensorowy istnieje.*

Dowód. Niech H będzie modułem wolnym z bazą $M \times N$. By oznacznia były bardziej sugestywne zamiast (m,n) będziemy pisać $m \otimes n$. W module H definujemy podmoduł I jako podmoduł generowany przez elementy następujących postaci:

$$(a_1m_1 + a_2m_2) \otimes n - a_1m_1 \otimes n - a_2m_2 \otimes n$$

$$m \otimes (a_1n_1 + a_2n_2) - a_1m \otimes n_1 - a_1m \otimes n_2$$

i przyjmujemy $M \otimes N = H/I$. Operacje $\otimes$ definujemy jako klasę $m \otimes n = (m,n)$ w module ilorazowym H/I. Łatwo spradzić że $\otimes$ jest operacją dwuliniową: wydzielenie przez podmoduł I zapewnia potrzebne równości. Jeśli W jest modułem z definicji iloczynu tensorowego zaś η jest operacją dwuliniową z $M \times N$ w W to definujemy ϕ w ten sposób że

$$\phi(m \otimes n) = \eta(m,n)$$

Aby ϕ było dobrze zdefiniowane musimy sprawdzić że ϕ znika na I. Lecz to wynika z dwuliniowości η. Zauważmy że powyższa defincja ϕ jest wymuszona przez defincję iloczynu tensorowego, skąd wynika że ϕ jest wyznaczone jednoznacznie. $\square$

Lemat 1.2 *Jeśli M, N, K są R-modułami to $M \otimes N$ jest izomorficzne z $N \otimes M$, $(M \otimes N) \otimes K$ jest izomorficzne z $M \otimes (N \otimes K)$. Jeśli $M = M_1 \oplus M_2$ i $N = N_1 \oplus N_2$ to $M \otimes N$ jest izomorficzne z $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ i $M \otimes N$ jest izomorficzne z $(M \otimes N_1) \oplus (M \otimes N_2)$.*

Dowód. Wynika to używając własność definicyjną. Np. dla $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ mamy operacje $\otimes_i$ z $M_i \times N$ w $M_i \otimes N$ i jest spełniona własność produktu tensorowego dla $M_i \times N$. Pokażemy że $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ spełnia własność produktu tensorowego. Operację $\otimes$ definujemy wzorem

$$(m_1 \oplus m_2) \otimes n = (m_1 \otimes_1 n) \oplus (m_2 \otimes_2 n).$$

Rozważamy teraz operację dwuliniową η z $M \times N$ w W. Ograniczenie η do $M_1 \times N$ daje operację η_1 z $M_1 \times N$ w W. Podobnie ograniczenie η do $M_2 \times N$ daje operację η_2 z $M_2 \times N$ w W. Z własności iloczynu tensorowego dla $M_i \otimes N$ istnieją ϕ_i takie że

$$\eta_i(m, n) = \phi_i(m \otimes_i n)$$

dla $m \in M_i$ i $n \in N$. Wtedy definując ϕ wzorem

$$\phi(t_1 \oplus t_2) = \phi_1(t_1) + \phi_2(t_2)$$

gdzie $t_i \in M_i \otimes N$ mamy

$$\eta(m_1 \oplus m_2, n) = \eta_1(m_1, n) + \eta_2(m_2, n) = \phi_1(m_1 \otimes_1 n) + \phi_2(m_2 \otimes_2 n)$$
$$= \phi((m_1 \otimes_1 n) \oplus (m_2 \otimes_2 n)) = \phi((m_1 \oplus m_2) \otimes n)$$

gdzie ostatnia równość to definicja $\otimes$ z $M \times N$ w $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$. A więc dla $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ z powyżej zdefiniowanym $\otimes$ spełniona jest własność iloczynu tensorowego, czyli mamy izomorfizm z $M \otimes N$. Pozostałe izomorfizmy mają podobne dowody, więc je pominiemy. □

Lemat 1.3 *Jeśli $M = \oplus_\alpha M_\alpha$ to $M \otimes N$ jest izomorficzny z $\oplus_\alpha (M_\alpha \otimes N)$. Jeśli $N = \oplus_\alpha N_\alpha$ to $M \otimes N$ jest izomorficzny z $\oplus_\alpha (M \otimes N_\alpha)$.*

Dowód jest podobny do poprzedniego.

Lemat 1.4 *$M \otimes R$ jest izomorficzne z M. Podobnie $R \otimes M$ jest izomorficzne z M.*

Dowód. Operację $\otimes$ z $M \times R$ w M definiuję wzorem $m \otimes a = am$. Niech η będzie operacją dwuliniową z $M \times R$ w W i niech $\phi(m) = \eta(m, 1)$. Oczywiście ϕ jest operacją liniową. Mam

$$\eta(m, a) = \eta(am, 1) = \phi(am) = \phi(m \otimes a)$$

czyli jest spełniona własność iloczynu tensorowego. □

Lemat 1.5 *Jeśli M jest modułem wolnym z bazą $\{e_\alpha\}$ zaś N jest modułem wolnym z bazą $\{f_\beta\}$ to $M \otimes N$ jest modułem wolnym z bazą $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$*

Dowód: jest to bezpośredni wniosek z poprzedniego lematu. □

Wniosek: Jeśli R to ciało to $\dim(M \otimes N) = \dim(M)\dim(N)$.

Przykład: Jeśli $R = \mathbb{Z}$, zaś p i q to względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie to $R/(pR) \otimes R/(qR)$ to moduł zerowy. Mianowicie skoro p i q są względnie pierwsze to istnieją liczby całkowite a i b takie że $1 = ap + bq$. Teraz dla $u \otimes v \in R/(pR) \otimes R/(qR)$ mamy

$$u \otimes v = (ap + bq)(u \otimes v) = ap(u \otimes v) + bq(u \otimes v)$$

$$= a(pu \otimes v) + b(u \otimes qv).$$

Lecz $pu = 0$ w $R/(pR)$ i $qv = 0$ w $R/(qR)$ czyli powyższy element to 0. Jako że elementy postaci $u \otimes v$ generują $R/(pR) \otimes R/(qR)$ to produkt tensorowy jest zerowy.

Lemat 1.6 *Jeśli dla $i = 1, 2$ M_i, N_i są R-modułami, zaś $\phi_i : M_i \to N_i$ są homomorfizmami to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : (M_1 \otimes M_2) \to (N_1 \otimes N_2)$ taki że*

$$\phi(m_1 \otimes m_2) = \phi_1(m_1) \otimes \phi_2(m_2)$$

Dowód: $\phi_1(m_1) \otimes \phi_2(m_2)$ jest odwzorowaniem dwuliniowym z $M_1 \times M_2$ w $N_1 \otimes N_2$ a więc ϕ istnieje i jest jednoznaczne z własności definicyjnej iloczynu tensorowego $M_1 \otimes M_2$. □

W dalszym ciągu odwzorowanie ϕ wyżej będziemy oznaczać przez $\phi_1 \otimes \phi_2$.

Lemat 1.7 *Jeśli dla $i = 1, 2$ M_i, N_i, V_i są R-modułami, zaś $\phi_i : M_i \to N_i$ i $\psi_i : N_i \to V_i$ są homomorfizmami to*

$$(\psi_1 \otimes \psi_2)(\phi_1 \otimes \phi_2) = (\psi_1\phi_1) \otimes (\psi_2\phi_2)$$

Dowód: Bezpośrednie sprawdzenie z własności definicyjnej. □

Lemat 1.8 *Jeśli M_i, N_i wyżej są skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem k i $M_i = N_i$ to*

$$\mathrm{Tr}(\phi_1 \otimes \phi_2) = \mathrm{Tr}(\phi_1)\mathrm{Tr}(\phi_2)$$

Dowód. Niech $\{e_i\}$ będzie bazą M_1, $\{f_j\}$ bazą M_2 zaś $\{e_i^*\}$ i $\{f_j^*\}$ będą bazami dualnymi. Wtedy $\{e_i^* \otimes f_j^*\}$ jest bazą $M_1^* \otimes M_2^*$ dualną do $\{e_i \otimes f_j\}$. Mamy

$$\mathrm{Tr}(\phi_1 \otimes \phi_2) = \sum_{i,j} \langle (\phi_1 \otimes \phi_2)(e_i \otimes f_j), e_i^* \otimes f_j^* \rangle = \sum_{i,j} \langle (\phi_1(e_i) \otimes \phi_2(f_1), e_i^* \otimes f_j^* \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle \phi_1(e_i), e_i^* \rangle \langle \phi_2(f_j), f_j^* \rangle = \left(\sum_i \langle \phi_1(e_i), e_i^* \rangle \right) \left(\sum_j \langle \phi_2(f_j), f_j^* \rangle \right)$$

$$= \mathrm{Tr}(\phi_1)\mathrm{Tr}(\phi_2).$$

□

2 Produkt tensorowy reprezentacji

Jeśl R i S są algebrami nad k to na $R \otimes_k S$ (gdzie $\otimes_k$ oznacza że produkt tensorowy liczymy biorąc k jako pierścień) można wprowadzić strukturę pierścienia wzorem

$$(r_1 \otimes_k s_1)(r_2 \otimes_k s_2) = (r_1 r_2) \otimes_k (s_1 s_2)$$

Własność produktu tensorowgo pozwala pokazać że tak określone mnożenie jednoznacznie rozszerza się na $R \otimes_k S$ i spełnia aksjomaty mnożenia w pierścieniu.

Lemat 2.1 *Jeśli G i H są grupami to $k[G] \otimes_k k[H]$ jest izomorficzne z $k[G \times H]$.*

Dowód: Elementy δ_g, $g \in G$ dają bazę $k[G]$, elementy δ_h, $h \in H$ dają bazę $k[H]$, zaś elementy δ_{gh}, $g \in G, h \in H$ dają bazę w $k[G \times H]$. Na mocy wcześniejszego lematu $\delta_g \otimes \delta_h$ daje bazę $k[G] \otimes_k k[H]$. A więc przyporządkowanie

$$\delta_g \otimes \delta_h \mapsto \delta_{gh}$$

daje izomorfizm $k[G] \otimes_k k[H]$ z $k[G \times H]$ jako przestrzeni liniowych. Trzeba sprawdzić że zachowuje się mnożenie. Lecz

$$(\delta_{g_1} \otimes \delta_{h_1})(\delta_{g_2} \otimes \delta_{h_2}) = \delta_{g_1 g_2} \otimes \delta_{h_1 h_2}$$

i w $G \times H$ mamy $(g_1 h_1)(g_2 h_2) = (g_1 g_2)(h_1 h_2)$ czyli faktycznie mnożenie jest zachowane. □

Jeśli M jest R-modułem zaś N jest S-modułem to na $M \otimes_k N$ mamy naturalną strukturę $R \otimes_k S$-modułu:

$$(r \otimes s)(m \otimes n) = rm \otimes sn.$$

Lemat 2.2 *Niech ciało k będzie algebraicznie domknięte, R będzie skończenie wymiarową algebrą nad k zaś M prostym R-modułem. Jeśli V jest niezerowym podmodułem w $M \oplus M$ to albo $V = M \oplus M$ albo $V = \{0\} \oplus M$ albo istnieje $a \in k$ takie że V to zbiór elementów postaci $v \oplus av$ gdzie $v \in M$.*

Dowód: Rozważmy rzut z V na pierwszy składnik sumy prostej. Jako że M jest modułem prostym to obraz to moduł zerowy albo całe M. Jeśli obraz to moduł zerowy to V jest zawarte w $\{0\} \oplus M$ które jest izomorfczne z M. Czyli V jako niezerowy podmoduł modułu prostego $\{0\} \oplus M$ jest równe $\{0\} \oplus M$. A więc pozostaje rozpatrzeć przypadek gdy obraz V przez rzut na pierwszy składnik sumy to M, czyli dla każdego $v_1 \in M$ istnieje $v_2 \in M$ takie że $v_1 \oplus v_2 \in V$. Przy ustalonym $v_1 \oplus v_2 \in V$ elementy $w \in M$ takie że $v_1 \oplus (w + v_2) \in V$ tworzą podmoduł H w M. Zauważmy że H nie zależy od v_1, bo $w \in H$ wtedy i tylko wtedy gdy $0 \oplus w \in V$. Jeśli H to całe M to $V = M \oplus M$. A więc pozostaje rozpatrzeć przypadek gdy H to moduł zerowy. Wtedy V jest wykresem odwzorowania liniowego z M w M. Na mocy lematu Schura takie odwzorowanie to mnożenie przez element $a \in k$ (to jest jedyne miejsce gdzie w tym lemacie używamy skończoność wymiaru M i algebraiczną domkniętość k). Czyli elementy V są postaci $v \oplus av$. $\square$

Lemat 2.3 *Jeśli k jest algebraicznie domknięte, M jest prostym R-modułem który ma skończony wymiar nad k zaś N jest prostym S-modułem to $M \otimes_k N$ jest prostym $R \otimes_k S$-modułem.*

Dowód: Niech V będzie podmodułem $M \otimes_k N$. Ustalmy bazę $\{f_\alpha\}$ przestrzeni N nad k. Wtedy V zawiera element v postaci

$$\sum m_\alpha \otimes f_\alpha$$

Jesli wszystkie m_α są proporcjonalne nad k tzn. jeśli istnieje m i a_α takie że $m_\alpha = a_\alpha m$ to mogę napisać

$$v = \sum m_\alpha \otimes f_\alpha = \sum a_\alpha m \otimes f_\alpha = \sum m \otimes a_\alpha f_\alpha = m \otimes n$$

gdzie $n = \sum a_\alpha f_\alpha$. Jako że M i N są modułami prostymi to podmoduł nad R generowany przez m to całe M, podmoduł nad S generowany przez n to całe N czyli podmoduł nad $R \otimes_k S$ generowany przez $m \otimes n$ to całe $M \otimes_k N$. Jeśli istnieją α i β takie że m_α i m_β nie są proporcjonalne nad k to na mocy poprzedniego lematu podmoduł nad R generowany przez $m_\alpha \oplus m_\beta$ to $M \oplus M$ i w szczegolności zawiera element postaci $0 \oplus m$. Wtedy biorąc odpowiednią kombinację liniową v dostanę niezerowy element z mniejszą ilością składników w sumie. A więc indukcyjnie dostanę w V element postaci $m \otimes n$. $\square$

Jeśli G jest grupą zaś M i N są $k[G]$ modułami to na $M \otimes_k N$ (gdzie $\otimes_k$ oznacza że produkt tensorowy liczymy biorąc k jako pierścień) można w naturalny sposób wprowadzić strukturę $k[G]$ modułu. Mianowicie niech $\lambda(g)$ oznacza operator mnożenia przez δ_g w M zaś $\eta(g)$ oznacza operator mnożenia przez δ_g w N. Wtedy przyporządkowanie

$$g \mapsto \lambda(g) \otimes \eta(g)$$

zadaje reprezentację G na $M \otimes_k N$, czyli zadaje strukturę $k[G]$-modułu.

Lemat 2.4 *Jeśli dla $i = 1, 2$ λ_i są reprezentacjami G nad k zaś χ_i są odpowiednimi charakterami to $\chi(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ jest charakterem dla $\lambda_1 \otimes \lambda_2$. Podobnie $\chi(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g)$ jest charakterem dla $\lambda_1 \oplus \lambda_2$.*

Dowód. Mamy

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}(\lambda_1 \otimes \lambda_2(g)) = \mathrm{Tr}(\lambda_1(g))\mathrm{Tr}(\lambda_2(g)) = \chi_1(g)\chi_2(g)$$

Dla sumy jest podobnie. $\square$

Z lematu wynika że charaktery tworzą półpierściem. Niekiedy wygodnie jest rozszerzyć ten półpierścień do pierścienia, tzn. rozpatrzeć moduł nad $\mathbb{Z}$ generowany przez charaktery modułów prostych z naturalnym mnożeniem.

Produkt tensorowy reprezentacji często jest rozkładalny. W szczególności w $M \otimes M$ podmoduł generowany przez elementy postaci $v \otimes v$ (oznaczany przez $S^2(M)$) jest niezmienniczy na działanie G. Podobnie $(M \otimes M)/S^2(M)$ (oznaczane przez $\Lambda^2(M)$) jest izomorficzne z podmodułem $(M \otimes M)$.

Bez dowodu podamy

Lemat 2.5 *Jeśli χ jest charakterem M, η jest charakterem $S^2(M)$ zaś ϕ jest charakterem $\Lambda^2(M)$ to*

$$\eta(g) = (\chi(g)^2 + \chi(g^2))/2$$

$$\phi(g) = (\chi(g)^2 - \chi(g^2))/2$$

3 Reprezentacje indukowane

Dotychczas rozpatrywaliśmy produkty tensorowe nad pierścieniem przemiennym. Było to spowodowane tym że zwykła definicja odwzorowania dwuliniowego prowadzi do warunku typu przemienności na pierścień. Nad pierścieniem nieprzemiennym potrzebujemy słabszy warunek. Po pierwsze rozważamy prawy R-moduł M i lewy R-moduł N. Bez dodatkowych założeń nad pierściem nieprzemiennym $M \otimes N$ jest tylko grupą abelową. Powiemy że odwzorowanie η z $M \times N$ w grupę abelową W jest prawie dwuliniowe jeśli spełnia następujące warunki:

- η jest addytywne ze względu na pierwszy argument
- η jest addytywne ze względu na drugi argument
- $\eta(ma, n) = \eta(m, an)$

Powiemy że para grupa abelowa V i odwzorowamie prawie dwuliniowe $\otimes$ z $M \times N$ w V jest iloczynem tensorowym M i N wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego odwzorowania prawie dwuliniowego η z $M \times N$ w grupę abelową W istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup abelowych ϕ taki że

$$\eta(m, n) = \phi(m \otimes n)$$

Tak jak w przypadku pierścienia przemiennego pokazujemy że tak okreslony iloczyn tensorowy jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu grup abelowych.

Lemat 3.1 *Wyżej określony iloczyn tensorowy istnieje.*

Dowód. Grupa abelowa to moduł nad $\mathbb{Z}$. Niech $H = N \otimes_{\mathbb{Z}} N$ gdzie $\mathbb{Z}$ traktujemy jako podpierścień R generowany przez 1. Miech I będzie podgrupą W generowaną przez elementy postaci $(ma) \otimes n - m \otimes (an)$ gdzie $m \in M$, $n \in N$, $a \in R$. Bierzemy $V = H/I$. Łatwo sprawdzić że $\otimes$ jako operacja z $M \times N$ w V jest prawie dwuliniowe. Jak poprzednio, dla prawie dwuliniowego η definiuję ϕ wzorem

$$\phi(m \otimes n) = \eta(m, n).$$

Jako że η jest prawie dwuliniowe to ϕ znika na I, czyli mamy dobrze zdefiniwany homomorfizm grup abelowych z V w W. Określenie ϕ jest wymuszone przez definicję iloczynu tensorowego czyli ϕ jest wyznaczone jednoznacznie. □

Jeśli M jest dodatkowo lewym modułem nad pierścieniem S to na $M \otimes N$ można wprowadzić strukturę lewego S modułu wzorem

$$s(m \otimes n) = (sm) \otimes n.$$

Podobnie jesli N jest dodatkowo prawym modułem nad pierścieniem S to na $M \otimes N$ można wprowadzić strukturę prawego S modułu wzorem

$$(m \otimes n)s = m \otimes (ns).$$

Lemat 3.2 *Jeśli M jest prawym S modułem, N jest lewym S modułem i prawym R-modułem zaś V jest lewym R-modułem to $(M \otimes_S N) \otimes_R V$ jest izomorficzne z $M \otimes_S (N \otimes_R V)$.*

Dowod: Przez własność definicyjną. □

Jeśli pierścień R jest przemienny to lewy R-moduł można traktować jako prawy R moduł i odwrotnie. Wtedy nasza konstrukcja produktu tensorowego nad R daje R moduł i można sprawdzić że $\otimes$ jest dwuliniowe. Podobnie dla dwuliniowego η również ϕ będzie dwuliniowe. A więc w przypadku pierścienia przemiennego nowa defincjia daje ten sam wynik co stara. Ogólniej, jeśli R zawiera w centrum pierścień przemienny S (czyli R jest algebrą nad S) to w konstrukcji wyżej możemy zastąpić $\mathbb{Z}$ przez S: jako moduł H bierzemy $M \otimes_S N$, I definijemy jak poprzednio ale teraz jest modułem nad S i $V = H/I$. Tak zbudowane V spełnia warunek definicyjny iloczynu tensorowego czyli jest izomorficzne z iloczynem tensorowym.

Gdy $M = S$ zaś R jest podpierścieniem S to M ma naturalną strukturę lewego i prawego S-modułu czyli też prawego R-modułu. W takim przypadku powyższa konstrukcja jest nazywana rozszerzeniem skalarów z R do S. Mianowicie, z R-modułu N dostajemy S moduł $S \otimes_R N$.

W kontekście teorii reprezentacji, gdy H jest podgrupą G to $k[H]$ jest podpierścieniem $k[G]$ i moduł otrzymany przez rozszerzanie skalarów z $k[H]$ do $k[G]$ nazywamy modułem indukowanym (lub reprezentacją indukowaną).

Lemat 3.3 *(Indukcja etapami) Jeśli U jest podgrupą H, H jest podgrupą G zaś M jest $k[U]$ modułem to $k[G] \otimes_{k[U]} M$ jest izomorficzne z $k[G] \otimes_{k[H]} (k[H] \otimes_{k[U]} M)$.*

Dowód: $k[G] \otimes_{k[H]} k[H]$ jest izomorficzne z $k[G]$ zaś reszta wynika z łączności iloczynu tensorowego. □

Podamy teraz bardziej konkretną konstrukcję reprezentacji indukowanej w przypadku gdy podgrupa S grupy G jest skończona. Niech M będzie $k[S]$ modułem czyli reprezentacją S. Niech H będzie przestrzenią funkcji na G o wartościach w M takich że przyjmują tylko skończenie wiele niezerowych wartości zaś V będzie podprzestrzenią H funkcji spełniających warunek

$$v(gs^{-1}) = \delta_s v(g)$$

gdzie mnożenie przez δ_s to działanie reprezentacji. Można sprawdzić że V jest podprzestrzenią dopełniczą do I gdzie I jest podprzestrznią H generowaną przez elementy postaci

$$v(gs^{-1}) - \delta_s v(g).$$

(tu istotne jest że S jest skończone). Zauważmy teraz że H jest izomorficzne z $k[G] \otimes_k M$ zaś I jest podmodułem z konstrukcji iloczynu tensorowego. Dokładniej, w $k[G]$ mamy

$$\delta_g \delta_s = \delta_{gs}$$

co daje

$$(v\delta_h)(g) = v(gs^{-1})$$

A więc rzeczywiście I to podprzestrzeń z definicji iloczynu tensorowego. Teraz V jest izomorficzne z H/I, czyli faktycznie V daje nam iloczyn tensorowy $K[G] \otimes_{k[S]} M$. Podobnie jak dla I sprawdzamy że

$$(\delta_g v)(h) = v(g^{-1}h)$$

co daje jawnie działanie G w przestrzeni reprezentacji indukowanej.

Druga konstrukcja reprezentacji indukowanej pozwala pokazać że ma ona dodatkową własność. Mianowicie, rozważmy podział G na warstwy lewostronne względem podgrupy S. Przestrzeń warstw oznaczamy przez G/S. Wtedy jeśli $\sigma_1, \sigma_2 \in G/S$, przy ustalonym $g \in G$ dla pewnego $u \in \sigma_1$ mamy $gu \in \sigma_2$ to dla dowolnego $u \in \sigma_1$ mamy $gu \in \sigma_2$. A więc biorąc jako V_σ podprzestrzeń V składającą się z funkcji które są zerem poza warstwą σ mamy $\delta(g)V_{\sigma_1} = V_{\sigma_2}$. Innymi słowy G permutuje przestrzenie V_σ. Ponadto

$$V = \oplus_\sigma V_\sigma.$$

Dodatkowo, warunek nałożony na V oznacza że reprezentacja S w przestrzeni V_e jest równoważna z wyjściową reprezentacją M.

Lemat 3.4 *Niech będzie dana reprezentacja λ grupy G na W, $W = \oplus_\sigma W_\sigma$ i G tranzytywnie permutuje przestrzenie W_σ. Ustalmy pewne σ_0 i niech*

$$S = \{g \in G : \delta_g W_{\sigma_0} = W_{\sigma_0}\}.$$

Wtedy reprezentacja na W jest izomorficzna z reprezentacją indukowaną z reprezentacji S na W_{σ_0}.

Dowód. Zauważmy że ponieważ G tranzytywnie permutuje przestrzenie W_σ to zbiór σ można utożsamić ze zbiorem warstw lewostronnych G/S. Oznaczmy przez η działanie reprezentacji indukowanej na V. Zdefininujemy odwzorowanie liniowe ϕ z W do V. Robimy to dla każdej podprzestrzeni W_σ z osobna. Niech $u \in \sigma$. Bierzemy

$$\phi(x) = \eta(u)\lambda(u^{-1})x$$

dla $x \in W_\sigma$. Ten wzór ma sens bo $\lambda(u^{-1})x \in W_e = V_e$. Widać że $\phi(x) \in V_\sigma$. Jeśli us jest innym elementem σ to

$$\eta(us)\lambda((us)^{-1}) = \eta(u)\eta(s)\lambda(s^{-1})\lambda(u^{-1})$$

Lecz na $W_e = V_e$ dla $s \in S$ działania η i λ są równe, czyli $\eta(s)\lambda(s^{-1})$ to identyczność i wartość ϕ nie zależy od wyboru u. Jeśli $g \in G$ to biorąc gu jako reprezentant $g\sigma$ mam

$$\phi(\lambda(g)x) = \eta(gu)\lambda((gu)^{-1})\lambda(g)x = \eta(g)\eta(u)\lambda(u^{-1})\lambda(g^{-1})\lambda(g)x$$

$$= \eta(g)\eta(u)\lambda(u^{-1})x = \eta(g)\phi(x)$$

czyli ϕ zadaje homomorfizm reprezentacji (operator splatający). Lecz z określenia widać że ϕ na każdym W_σ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych czyli skoro W i V są sumami prostymi to ϕ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych. czyli jest izomorfizmem (równoważnością) reprezentacji. $\square$

Lemat 3.5 *Jeśli R jest zbiorem reprezentantów G/S, χ jest charakterem reprezentacji S na M rozszerzonym przez 0 na G, zaś η jest charakterem reprezentacji indukowanej to*

$$\eta(g) = \sum_{r\in R} \chi(r^{-1}gr) = \frac{1}{|S|}\sum_{u\in G} \chi(u^{-1}gu)$$

Dowód: Niech $V = \oplus \delta_r M$ będzie przestrzenią reprezentacji indukowanej. Zauważmy że albo $\delta_g\delta_r M = \delta_r M$ albo $\delta_g\delta_r M \cap \delta_r M = \{0\}$. W drugim przypadku podprzestrzeń $\delta_r M$ daje zerowy wkład do śladu. W pierwszym mamy

$$\mathrm{Tr}(\delta_g)|_{\delta_r M} = \mathrm{Tr}(\delta_{r^{-1}}\delta_g\delta_r)|_M = \mathrm{Tr}(\delta_{r^{-1}gr})|_M = \chi(r^{-1}gr).$$

Przy tym w pierwszym przypadku $r^{-1}gr \in S$, w drugim $r^{-1}gr \notin S$, czyli $\chi(r^{-1}gr) = 0$. A więc

$$\eta(g) = \mathrm{Tr}(\delta_g) = \sum_{r:r^{-1}gr\in S} \mathrm{Tr}(\delta_g)|_{\delta_r M} = \sum_{r:r^{-1}gr\in S} \chi(r^{-1}gr) = \sum_r \chi(r^{-1}gr)$$

co daje pierwszą równość. Druga wynika z pierwszej zapisując elementy $u \in G$ w postaci $u = rs$ i sumując najpierw po s:

$$\sum_u \chi(u^{-1}gu) = \sum_r\sum_s \chi(s^{-1}r^{-1}grs) = \sum_r\sum_s \chi(r^{-1}gr) = |S|\sum_r \chi(r^{-1}gr).$$

$\square$