1 Grupa $SL(2,q)$

Niech $F(q)$ bedzie ciałem skończonym o q elementach. Wtedy zdefiniowaliśmy grupę $SL(2,K)$ jako grupę macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1.

Grupa $SL(2,q)$ jest ciekawa bo jest to najprostsza grupa skończona typu Liego. Dla małych q $SL(2,q)$ lub iloraz przez centum daje kilka klasycznych grup (np. grupę alternującą na 5 elementach).

Dla $q > 3$ $SL(2,q)$ po wydzieleniu przez centrum daje grupę prostą. Znana jest klasyfikacja skończonych grup prostych. W pewnym sensie prawie wszystkie grupy proste to grupy typu Liego. Dokładniej, jest 26 grup które są wyjątkami i nie wpisują się nieskończone rodziny (tak zwane grupy sporadyczne). Są dwie nieskończone rodziny grup nie-Liego: grupy abelowe Z_p i grupy alternujące A_n. Pozostała część klasyfikacji to kilkanaście rodzin grup typu Liego.

Grupa $SL(2,q)$ poza tym że jest przykładem grupy typu Liego może być narzędziem bo można ją znaleźć jako podgrupę większych grup.

2 Grupy krystalograficzne

Idealny kryształ to periodyczna kolekcja atomów. Interesują nas symetrie kryształu. Fizycznie najważniejsze są kryształy w przestrzeni trójwymiarowej. Matematycznie możemy rozważać dowolne $\mathbb{R}^n$ jako przestrzeń. Z definicji symetriami są przesunięcia o okresy co daje $\mathbb{Z}^n$ jako podgrupę grupy symetrii G. Jest to podgrupa normalna. Iloraz H grupy G przez $\mathbb{Z}^n$ jest grupą skończoną. Działanie G na $\mathbb{Z}^n$ przez automorfizmy wewnętrzne daje reprezentację H na $\mathbb{Z}^n$. Przy tym jest to reprezentacja wierna, bo przekształcenie afiniczne komutujące z przesunięciami jest samo przesunięciem.

Pierwszym krokiem do wyznaczenia możliwych grup symetrii jest wyznaczenie grup skończonych które mają wierną reprezentacje na $\mathbb{Z}^n$.

Tradycyjne podejście dla $\mathbb{R}^3$ wyglądało następująco:

- wyznaczenie grup mających reprezentacje na $\mathbb{R}^3$
- sprawdzenie które z nich mają reprezentacje na $\mathbb{Z}^3$
- wyznaczenie klas równoważności reprezentacji na $\mathbb{Z}^3$

Znając reprezentacje pozostawało wyznaczyć możliwe struktury G, co we współczesym języku sprowadza się do policzenia odpowiednich grup homologii H.

Wyniki tej analizy są dość długie i dostępne w książkach, nie będziemy ich tu powtarzać.

Jest prosta sztuczka która pozwala uzyskać istotną informację o grupie H. Mianowicie H zachowuje $2\mathbb{Z}^n$ co prowadzi do reprezentacji H nad Z_2 (można też wziąść inną liczbę pierwszą). Jądro tego homomorfizmu jest grupą rozwiązalną. Dla $n = 3$ obraz to podgrupa grupy $SL(3,2)$. Grupa $SL(3,2)$ jest grupą prostą – można pokazać że jest izomorficzna z ilorazem grupy $SL(2,7)$ przez centrum.

Jednak obraz H musi być właściwą podgrupą $SL(3,2)$ która jest rozwiązalna. Taki argument pozwala to pokazać że dla $\mathbb{Z}^3$ całe H jest rozwiązalne.

3 Reprezentacje charakterystyki skończonej

W przypadku gdy charakterystyka p ciała nie dzieli mocy grupy i ciało jest dostatecznie duże teoria w charakterystyce p jest izomorficzna z teorią w charakterystyce 0. Dokładniej, niech m będzie wykładnikiem G, tzn. taką najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią że dla każdego $g \in G$ mamy $g^m = e$. Pokazaliśmy że wtedy każda reprezentacja grupy G daje się zrealizować nad ciałem $K = \mathbb{Q}(e_m)$ gdzie e_m jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia m z 1. Niech A będzie podpierścieniem w K generowanym przez $\mathbb{Z}$ i e_m i niech $\mathbf{m}$ będzie ideałem maksymalnym w A zawierającym p. Wtedy pierścień ilorazowy $A/\mathbf{m}$ jest ciałem F charakterystyki p zawierającym pierwiastek pierwotny stopnia e_m z 1.

Lemat 3.1 *Redukcja modulo* $\mathbf{m}$ *zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych* G *nad* K *i charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych* G *nad* F.

Szkic dowodu: K jest ciałem ułamków A. Niech B będzie podpierścieniem K składającym się z elementów które można zapisać jako ułamek z mianownikiem nie należącym do $\mathbf{m}$. Redukacja modulo $\mathbf{m}$ jest dobrze zdefiniowana na B (jest to największy podpierścień K na którym redukcja modulo $\mathbf{m}$ jest dobrze zdefiniowana). B jest tak zwanym pierścieniem lokalnym. Co istotniejsze B jest pierścieniem ideałów głównych. Niech G działa na przestrzeni wektorowej V nad K. Jak w zadaniu 2 z listy 6 istnieje w V skończenie generowalny podmoduł M nad B który generuje V jako przestrzeń wektorową. Jako że B jest pierścieniem ideałów głównych M jest modułem wolnym tego samego wymiaru co V. $W = M/(\mathbf{m}M)$ jest przestrzenią wektorową nad F i G działa na W. Czyli reprezentacji nad K odpowiada co najmniej jedna reprezentacja nad F. Charakter tak otrzymanej reprezentacji jest redukcją modulo $\mathbf{m}$ charakteru reprezentacji nad K, czyli charakter redukcji jest wyznaczony jednoznacznie. Jeśli V ma wymiar l to V to W też ma wymiar l. V występuje z krotnością l w $K[G]$, więc W też występuję z krotnością l w $F[G]$ czyli składniki nieprzywiedlne W występują w $F[G]$ z krotnością co najmniej l. A więc na mocy twierdzenia Wedderburna dowolny niezerowy składnik nieprzywiedlny W musi mieć wymiar co najmniej l. Jako że W ma wymiar l oznacza to że W jest reprezentacją nieprzywiedlną. $\square$