Przykłady i rozszerzenia

10 kwietnia 2018

Grupa $SL(2,q)$

Niech K bedzie pierścieniem przemiennym. Wtedy defininiujemy grupę $SL(2,K)$ jako grupę macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1 (macierz o wyznaczniku 1 jest odwracalna, więc faktycznie dostaniemy grupę). W dalszym ciągu będziemy rozważać $SL(2,K)$ dla $K = F(q)$ gdzie $F(q)$ jest ciałem skończonym o q elementach. Większość metod poniżej działa dla dowolnego q, ale wyniki się różnią i gdy trzeba będziemy zakładać że q jest nieparzyste (czyli $1 \neq -1$). Wtedy $SL(2,K)$ jest grupą skończoną którą oznaczymy przez $SL(2,q)$.

Dowolny element $SL(2,q)$ możemy otrzymać w następujący sposób: najpierw wybieramy niezerowy wektor z K^2 jako pierwszy wiersz macierzy. Następnie wybieramy drugi wiersz tak by wyznacznik był 1. Wyznacznik jest liniową funkcją drugiego wiersza, przy tym jeśli pierwszy wiersz jest niezerowy to jest to funkcja niezerowa, czyli wybór jest zawsze możliwy. Pierwszy wybór daje $q^2 - 1$ możliwości na pierwszy wiersz, przy drugim wyborze zbiór rozwiązań to warstwa podprzestrzeni wymiaru 1, czyli mamy q możliwości. A więc $|SL(2,q)| = q(q^2 - 1) = (q-1)q(q+1)$.

Grupa $SL(2, q)$

Grupa $SL(2, q)$ jest ciekawa bo jest to najprostsza grupa skończona typu Liego. Dla małych q $SL(2, q)$ lub iloraz przez centum daje kilka klasycznych grup (np. grupę alternującą na 5 elementach. Dla $q > 3$ $SL(2, q)$ daje grupę prostą. Znana jest klasyfikacja skończonych grup prostych. W pewnym sencie prawie wszystkie grupy proste to grupy typu Liego. Dokładniej, jest 26 grup które są wyjątkami i nie wpisują się nieskończone rodziny (tak zwane grupy sporadyczne). Są dwie nieskończone rodziny grup nie-Liego: grupy abelowe Z_p i grupy alternujące A_n. Pozostała część klasyfikacji to kilkanaście rodzin grup typu Liego.
Grupa $SL(2, q)$ poza tym że jest przykładem grupy typu Liego może być narzędziem bo można ją znaleźć jako podgrupę większych grup.

Grupa $SL(2,q)$

Element $g \in SL(2,q)$ spełnia jeden z warunków niżej:

- g ma dwie różne wartości własne w $F(q)$
- g ma dwie różne wartości własne w $F(q^2) - F(q)$
- g ma równe wartości własne

Jeśli dodatkowo g się diagonalizuje to $g = \pm I$ gdzie I to macierz jednostkowa. Daje to dwie jednoelementowe klasy sprzężoności.

W przeciwnym razie g jest sprzeżone z elementem postaci $\pm n_c$ gdzie

$$n_c = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z niezerowym c.

Niech $N = \{n_c : c \in F(q)\}$. Łatwo zauważyć że n_c jest sprzężone z n_{a^2c} dla niezerowego a. Można pokazać że takie elementy dają przekrój klasy sprzężoności n_c z N.

Zauważny że $a^2c = (-a)^2c$, czyli dla nieparzystego q wartość a^2c osiągniemy na dwa sposoby. Czyli a^2c przebiega $(q-1)/2$ wartości i mamy dwie orbity. Uwzględniając że $\lambda = \pm 1$ to mamy 4 kasy sprzężoności powyższej postaci.

Grupa $SL(2, q)$

Jeśli g ma dwie różne wartości własne to g jest sprzężone z macierzą postaci

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Przy tym dowolna macierz komutująca z g się diagonalizuje, czyli komutant ma $(q-1)$ elementów, a więc klasa sprzężoności ma $q(q+1)$ elementów. Widać że λ i λ^{-1} dają tą samą klasę. Z drugiej strony, macierze które są sprzężone w $SL(2, q)$ mają ten sam zbiór wartości własnych. Czyli $\{\lambda, \lambda^{-1}\}$ wyznacza dokładnie jedną klasę sprzeżoności. Tutaj wykluczone jest 0 (nie ma odwrotności), 1 i -1 (wtedy wartości własne są równe). A więc mamy $(q-3)/2$ klasy tego typu.

Grupa $SL(2, q)$

Nieco bardziej skomplikowane rozumowanie pokazuje że jeśli g ma dwie różne wartości własne z $F(q^2) - F(q)$ to elementy komutujące z g tworzą podgrupę cykliczną mocy $q + 1$ której elementy to I, $-I$ a pozostałe elementy mają dwie różne wartości własne z $F(q^2) - F(q)$. Wynika stąd że klasa sprzężoności g ma $(q-1)q$ elementów. Jest $(q-1)/2$ takich klas sprzężoności, przy tym g^{-1} jest sprzężone z g i jest to jedyny element komutanta g sprzężony z g.

Grupa $SL(2, q)$

Podsumujmy nasze wyliczenia klas w tabelce:

rodzaj	moc klasy	liczba klas	moc sumy klas
$\pm I$	1	2	2
$\pm n_c$	$(q^2 - 1)/2$	4	$2(q^2 - 1)$
$\lambda \in F(q) - \{0, 1, -1\}$	$q(q+1)$	$(q-3)/2$	$(q-3)q(q+1)/2$
$\lambda \in F(q^2) - F(q)$	$(q-1)q$	$(q-1)/2$	$q(q-1)^2/2$
Razem		$q+4$	$(q-1)q(q+1)$

Na mocy twierdzenia Wedderburna grupa $SL(2, q)$ ma $q + 4$ klasy równoważności reprezentacji nieprzywiedlnych nad $\mathbb{C}$.

Grupa $SL(2, q)$

Z podanego opisu klas sprzężoności wynika

Lemat

Dla $q > 3$ jedynym nietrywialnym dzielnikiem normalnym $SL(2, q)$ jest centrum. Dla $q = 3$ jest jeszcze dzielnik normalny mocy $(q+1)(q-1) = 8$ z ilorazem mocy 3.

Dowód w notatkach.

Wniosek: Dla $q > 3$ jedyną reprezentacją jednowymiarową $SL(2, q)$ jest reprezentacja trywialna. $SL(2, 3)$ ma dwie reprezentacje jednowymiarowe.

Podgrupa M

Rozważmy podgrupę M grupy $SL(2,q)$ składającą się z macierzy postaci

$$A(\lambda, c) = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

M ma dzielnik normaly N składający się z macierzy dla których $\lambda = 1$. Dzieląc M przez N otrzymujemy grupę izomorficzną z grupą multyplikatywną ciała $F(q)$. Jest to grupa cykliczna mająca $q-1$ elementów. Składając odwzorowanie ilorazowe z jednowymiarowymi reprezentacjami otrzymamy $q-1$ reprezentacji jednowymiarowych M, a więc i $q-1$ charakterów jednowymiarowych.

Podgrupa M

N jest izomorficzne z grupą addytywną ciała $F(q)$, a więc reprezentacje nieprzywiedlne N są jednowymiarowe. Nasuwa się pytanie o reprezentacje indukowane z N. Zauważmy że w M jest większy dzielnik normaly $\tilde{N}$ generowany przez N i $\pm I$. $\tilde{N}$ jest grupą abelową, a więc preprezentacje indukowane z N rozkładają się na sumę prostą reprezentacji jednowymiarowych $\tilde{N}$. Aby móc otrzymać reprezentacje nieprzywiedlne rozważny więc reprezentacje indukowane z $\tilde{N}$. Taka reprezentacja ma wymiar $(q-1)/2$. Niech χ będzie charakterem reprezentacji $\tilde{N}$. Reprezentacja indukowana po obcięciu do N jest sumą prostą $(q-1)/2$ reprezentacji z charakterami χ_a zadanymi wzorem $\chi_a(n) = \chi(a^2 n)$ gdzie a przebiega wartości z $F(q)$ dające reprezentanty warstw. Ponieważ bierzemy tylko jedno z a i $-a$ otrzymane charaktery są różne. To oznacza że faktycznie otrzymamy w ten sposób reprezentację nieprzywiedlną M (każda nietrywialna podprzestrzeń niezmiennicza zawiera jednowymiarową podprzestrzeń z charakterem χ_a, a z jednej takiej podprzestrzeni działanie M da całą przestrzeń reprezentacji).

Podgrupa M

Jeśli dwa charaktery $\tilde{N}$ są związane wzorem $\chi_2(n) = \chi_1(a^{-1}na)$ to otrzymane reprezentacje są równoważne. Charaktery $\tilde{N}$ dają cztery klasy równoważności wzgledem tej relacji, więc otrzymamy cztery nierównoważne reprezentacje. Obliczmy charakter η reprezentacji indukowanej. Dla $m \notin \tilde{N}$ mamy $\eta(m) = 0$. Dla $m = -In$ z $n \in N$ mamy $\eta(m) = \chi(-I)\eta(n)$. A więc kluczowe jest obliczenie $\eta(n)$. Dla n_c mamy

$$\eta(n_c) = \frac{1}{2} \sum_{a \in F(q) - \{0\}} \chi(n_{a^2 c}).$$

Dalsze obliczenie jest dość skomplikowane (szczegóły w notatkach), tu podamy tylko wynik. Mianowicie, jeśli -1 nie jest kwadratem w $F(q)$ to $\eta(n_c) = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{q}}{2}$. Jeśli -1 jest kwadratem w $F(q)$ to $\eta(n_c) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{q}}{2}$. Uwzględniając to kiedy -1 jest kwadratem w $F(q)$ wynik można zapisać jako $\eta(n_c) = \frac{-1}{2} + \gamma$ gdzie

$$\gamma = \frac{\sqrt{(-1)^{(q-1)/2} q}}{2}$$

Reprezentacje indukowane

M ma $q-1$ reprezentacji jednowymiarowych odpowadających charakterom podgrupy składającej się z macierzy diagonalnych. Innymi słowy te reprezentacje pochodzą z wydzielenia M przez podgrupę macierzy postaci N_c i wzięcia reprezentacji jednowymiarowych ilorazu. Niech χ będzie charakterem M odpowiającym takiej reprezentacji jednowymiarowej. Wtedy charakter $\mathrm{Ind}(\chi)$ reprezentacji indukowanej liczymy używając podany wcześniej lemat, biorąc sumę po reprezentantach wartstw $SL(2,q)/M$. Można pokazać że są dokładnie dwa reprezentanty warstw $r \in SL(2,q)/M$ takie że $r^{-1}mr \in M$, przy tym przy jednym wyborze $\chi(r^{-1}mr) = \chi(m)$, przy drugim $\chi(r^{-1}mr) = \chi(m)^{-1}$. A więc $\mathrm{Ind}(\chi)(m) = \chi(m) + \chi(m)^{-1}$ dla m w postaci diagonalnej.

Reprezentacje indukowane

Dla m postaci $\pm N_c$ możemy rozumować następująco: jeśli $r^{-1}mr \in M$ to $r^{-1}mr$ jest postaci $\pm N_{c_2}$. Każdy wektor własny m jest wielokrotnością e_1, czyli re_1 jest wielokrotnością e_1. A więc $r \in M$, czyli jest dokładnie jedno r takie że $r^{-1}mr \in M$. A więc $\mathrm{Ind}(\chi)(m) = \chi(m)$.

Jeśli $m = \pm I$ to $r^{-1}mr = m$ i każdy reprezentant daje ten sam wkład, czyli $\mathrm{Ind}(\chi)(m) = (q+1)\chi(m)$.

Licząc $\langle \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\chi)), \chi \rangle$ obliczamy sumę po grupie M. Rutynowy rachunek daje

$$\langle \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\chi)), \chi \rangle = \langle \chi + \check{\chi}, \chi \rangle$$

gdzie jak wcześniej $\check{\chi}(m) = \chi(m^{-1})$. Jeśli $\chi(m) \neq \chi(m^{-1})$ to z ortogonalności charakterów (wniosek po lemacie 4.4 z wykładu 4) wynika że

$$\langle \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\chi)), \chi \rangle = 1$$

czyli $\mathrm{Ind}(\chi)$ zawiera tylko jedną kopię reprezentacji M z charakterem χ, a to oznacza że $\mathrm{Ind}(\chi)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną. Przy tym takie reprezentacje otrzymane z χ_1 i χ_2

Reprezentacje indukowane

$\check{\chi} = \chi$ oznacza że $\chi(m) = \chi(m^{-1}) = \chi(m)^{-1}$, czyli χ przyjmuje tylko wartości ze zbioru $\{-1, 1\}$. Grupa multyplikatywna ciała $F(q)$ jest cykliczna, więc są tylko dwa takie charaktery. A więc powyższa procedura indukcji daje $(q-3)/2$ różne reprezentacje nieprzywiedlne wymiaru $q+1$.

Gdy $\chi(m) = \chi(m^{-1})$ można wyliczyć że

$$\langle \mathrm{Ind}(\chi), \mathrm{Ind}(\chi) \rangle = 2$$

Czyli $\mathrm{Ind}(\chi)$ jest sumą dwu reprezentacji nieprzywiedlnych. Ponadto $\langle \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\chi))\chi \rangle = 2$. Dla $\chi = 1$ na mocy wzajemności Frobeniusa jedną ze składowych reprezentacji jest reprezentacja trywialna, druga reprezentacja ma wymiar q. W drugim przypadku, gdy $\chi(A(\lambda, c)) = -1$ dla λ będacego generatorem grupy multyplikatywnej ciała $F(q)$ otrzymamy dwie reprezentacje wymiaru $(q+1)/2$. Mianowicie, jako ako reprezentacja M $\mathrm{Ind}(chi)$ jest sumą dwu reprezentacji jednowymiarowych (trywialnych na N) i dwu reprezentacji wymiaru $(q-1)/2$ (nietrywialnych na N) podział na dwie reprezentacje wymiaru $(q+1)/2$ jest to jedyny możliwy

Reprezentacje indukowane

Reguła wzajemności Frobeniusa mówi że w ten sposób opisaliśmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne $SL(2, q)$ których obcięcie do M zawiera reprezentację jednowymiarową M (trywialną na N). Pozostałe reprezentacje po obcięciu do M są sumami reprezentacji wymiaru $(q-1)/2$ (nietrywialnych na N). Analizując to dokładniej można opisać wszystkie reprezentacje $SL(2, q)$ (szczegóły w notatkach).

Reprezentacje indukowane

Niżej podajemy w tabelce wynik naszych obliczeń. By zaoszczędzić miejsca używamy uproszczonych oznaczeń. Jako że charakter na elementach typu $-n_c$ jest wyznaczony przez wartość na n_c i wartość na $-I$ pomijamy klasy typu $-n_c$. Wartości na dwu klasach typu n_c są ze sobą związane więc podajemy tylko dla jednej. Dla charakterów wymiaru $(q+1)/2$ i $(q-1)/2$ wystarczy podanie jednego z pary.

Charakter	I	znak $-I$	$\lambda \in F(q)$	$\lambda \in F(q^2)$
tryw.	1	$+$	1	1
$\chi = 1$	q	$+$	1	-1
$\chi \neq \check{\chi}$	$q+1$	$\chi(-1)$	$\chi(\lambda) + \chi(\lambda)^{-1}$	0
$\chi = \check{\chi}$	$(q+1)/2$	$\chi(-1)$	$\chi(\lambda)$	0
$\psi \neq \check{\psi}$	$q-1$	$\psi(-I)$	0	$-\psi(\lambda) - \psi(\lambda)^{-1}$
$\psi = \check{\psi}$	$(q-1)/2$	$\psi(-I)$	0	$-\psi(\lambda)$

Grupy krystalograficzne

Idealny kryształ to periodyczna kolekcja atomów. Interesują nas symetrie kryształu. Fizycznie najważniejsze są kryształy w przestrzeni trójwymiarowej. Matematycznie możemy rozważać dowolen $\mathbb{R}^n$ jako przestrzeń. Z definicji symetriami są przesunięcia o okresy co daje $\mathbb{Z}^n$ jako podgrupę grupy symetrii G. Jest to podgrupa normalna. Iloraz H grupy G przez $\mathbb{Z}^n$ jest grupą skończoną. Działanie G na $\mathbb{Z}^n$ przez automorfizmy wewnętrzne daje reprezentację H na $\mathbb{Z}^n$. Przy tym jest to reprezentacja wierna, bo przekształcenie afiniczne komutujące z przesunięciami jest samo przesunięciem.
Pierwszym krokiem do wyznaczenia możliwych grup symetrii jest wyznaczenie grup skończonych które mają wierną reprezentacje na $\mathbb{Z}^n$.

Grupy krystalograficzne

Tradycyjne podejście dla $\mathbb{R}^3$ wyglądało następująco:

- wyznaczenie grup mających reprezentacje na $\mathbb{R}^3$
- sprawdzenie które z nich mają reprezentacje na $\mathbb{Z}^3$
- wyznaczenie klas równoważności reprezentacji na $\mathbb{Z}^3$

Znając reprezentacje pozostawało wyznaczyć możliwe struktury G, co we współczesym języku sprowadza się do policzenia odpowiednich grup homologii H.
Wyniki tej analizy są dość długie i dostępne w książkach, nie będziemy ich tu powtarzać.
Jest prosta sztuczka która pozwala uzyskać istotną informację o grupie H. Mianowicie H zachowuje $2\mathbb{Z}^n$ co prowadzi do reprezentacji H nad Z_2 (można też wziąść inną liczbę pierwszą).
Jądro tego homomorfizmu jest grupą rozwiązalną. Dla $\mathbb{Z}^3$ pozwala to pokazać że całe H jest rozwiązalne.

Reprezentacje indukowane

Oznaczny przez $R(G)$ pierścień z mnożeniem punktowym generowany przez charaktery. Elementy $R(G)$ nazywamy charakterami wirtualnymi.
Jeśli ψ jest funkcją centalną na S zaś ϕ jest funkcją centralną na G to

$$\mathrm{Ind}(\phi\psi) = \phi\mathrm{Ind}(\psi).$$

A więc elementy $R(G)$ indukowane z S tworzą ideał w $R(G)$.

Lemat

(Twierdzenia Artina) Każdy element $\phi \in R(G)$ jest wymierną kombinacją liniową charakterów indukowanych z podgrup cyklicznych. Dokładniej, $|G|\phi$ jest całkowitą kombinacją liniową charakterów indukowanych z podgrup cyklicznych.

Reprezentacje indukowane

Komentarz: Powyżej wystarczy wziąść tylko maksymalne podgrupy cykliczne. Ponadto wystarczy wziąść tylko jeden reprezentant w klasie sprzężoności podgrup cyklicznych. Dla grupy $SL(2, q)$ oznacza to że wystarczą trzy albo cztery podgrupy: podgrupa macierzy diagonalnych, podgrupa mocy $q + 1$ składająca się z macierzy diagonalizujących się nad $F(q^2)$ i jedna lub dwie podgrupy generowane przez elementy typu $-N$ (jeśli każdy element $F(p)$ jest kwadratem w $F(q)$ to potrzebne są dwie podgrupy, w przeciwnym razie wystarcza jedna). Bezpośredni rachunek pokazuje że faktycznie wystarczy jedna podgrupa typu $-N$. Przy tym dla q będącego potęgą otrzymuje się wielokrotności charakterów indukowanych z $\tilde{N}$. Jako że charaktery odpowiednich reprezentacji nieprzywiedlnych nie pojawiają się w innych reprezentacjach to widać że potrzeba dzielenia by otrzymać wszystkie charaktery. Patrząc na charaktery indukowane z podgrupy mocy $q + 1$ widać że potrzebne jest odejmowanie by otrzymać charaktery nieprzywiedlne.

Reprezentacje indukowane

Lemat

Charaktery grupy $S(n)$ permutacji zbioru n-elementowego przyjmują wartości całkowite wymierne.

Dowód: Charaktery przyjmują wartości będące całkowitymi liczbami algebraicznymi. A więc trzeba pokazać że wartości są wymierne (całkowita liczba algebraiczna która jest wymierna jest liczbą całkowitą). Na mocy twierdzenia Artina wystarczy pokazać że charaktery indukowane z podgrup cyklicznych są wymierne.
Pokażemy to w kilku krokach.
Krok 1. Jeśli g jest generatorem podgrupy cyklicznej i ma więcej niż jeden cykl w rozkładzie na cykle rozłączne możemy użyć indukcję etapami. Mianowicie rozważamy podgrupę $S(n)$ która zachowuje cykle g jako zbiory. Ta podgrupa jest produktem grup G_c permutacji elementów cyklu c. Robiąc indukcję etapami widać że wystarczy pokazać wynik dla G_c, czyli można zakładać że g jest pojedynczym cyklem.

Reprezentacje indukowane

Krok 2. Jeśli generator g jest cyklem długości l którą można zapisać jako produkt $l = km$ z względnie perwszymi k i m to g można potraktować jako permutacją produktu zbiorów k elementowego i m elementowego, tak że g działa po składowych jako cykl długości k i cykl długości m. Znowu robimy indukcję etapami, najpierw w produkcie grup permutacji zbioru k elementowego i m elementowego, a potem do permutacji zbioru l elementowego. Indukcja w produkcie daje produkt charakterów, więc to sprowadza problem do cyklu który jest potęgą liczby pierwszej.

Krok 3. Niech cykl g długości p^k gdzie p jest liczbą pierwszą będzie generatorem podgrupy cyklicznej C. Elementy C które nie są generatorami tworzą podgrupę H mocy p^{k-1}. Jeśli $h \in H$ i $u^{-1}hu \in C$ to $u^{-1}hu$ nie jest generatorm C, czyli $u^{-1}hu \in H$. Ponadto obcięcie charakteru C do H jest charakterem H. A więc z wzoru na charakter indukowany wynika że charakter indukowany na klasie h z H będzie wielokrotnością charakteru indukowanego z C. Czyli przez indukcję po k wystarczy pokazać że charakter

Reprezentacje indukowane

Krok 4. Niech g będzię generatorm podgrupy cyklicznej C mocy p^k zaś χ będzie charakterem C. $u^{-1}gu \in C$ oznacza że $u^{-1}gu$ jest generatorem C. Z wzoru na charakter indukowany wynika że charkter indukowany jest wielokrotnością sumy wartości χ na generatorach. Zauważmy że suma wartości χ po całym C jest wymierna bo jeśli χ jest charakterem trywialnym to jest to liczba całkowita, jeśli χ jest nietrywialny jest to wielokrotność sumy pierwiastków z 1 która wynosi 0. Suma wartości χ na generatorach to różnica sumy wartości χ na C i sumy wartości χ na elementach nie będących generatorami. Ale elementy nie będące generatorami tworzą podgrupę H, χ obciete do H jest charakterm H, czyli suma po H jest wymierna.

Reprezentacje indukowane

Niech p będzie liczbą pierwszą. Mówimy że element $g \in G$ jest p-elementem jeśli rząd g jest potęgą p. Mówimy że g jest p-regularny jeśli rząd p jest względnie pierwszy z p.
Mówimy że podgrupa G jest p-elementarna jeśli jest produktem grupy cykliczniej rzędu względnie pierwszego z p i podgrupy rzędu będącego potegą p (p-podgrupy).

Lemat

(Twierdzenia Brauera) Każdy element $R(G)$ jest kombinacją liniową z całkowitymi współczynnikami charakterów jednowymiarowych podgrup p-elementarnych (z dowolnym p).

Uwaga: Istnieją nieprzemienne p-grupy. Takie grupy muszą mieć reprezentacje nieprzywiedlne wymiaru większego niż 1, a więc w twierdzeniu Brauera trzeba uwzględniać charaktery podgrup. Innymi słowy, w przeciwieństwie do twierdzenia Artina nie można się ograniczyc do maksymalnych podgrup p-elementarnych.

Reprezentacje indukowane

Uwaga: W praktyce przy wyznaczaniu klas sprzężoności elementów również można wyliczyć komutant (a przynajmniej jego moc). Często podgrupy p-elementarne są małymi rozszerzeniami podgrup cyklicznych i łatwo je wyliczyć. Wtedy stosowanie twierdzenia Brauera wymaga podobnego wysiłku jak twiedzenie Artina a daje mocniejszy wynik. Ale czasami p-podgrupy są duże i skomplikowane.
Dla grupy $SL(2, q)$ z opisu komutantów elementów widać że jeśli składnik cykliczny zawiera nietrywialną klasę sprzężoności to cała podgrupa p-elementarna będzie albo cykliczna albo będzie podgrupą $\tilde{N}$. Widać że wymienione podgrupy są p-elementarne.
Dla nieparzystego q moc $SL(2, q)$ jest podzielna przez 8, a więc $SL(2, q)$ zawiera nieprzemienną 2-podgrupę.