1. Niech G będzie grupą macierzy 2 na 2 postaci

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi. Znajdź podprzestrzenie niezmiennicze dla naturalnej reprezentacji G na przestrzeni dwuwymiarowej.

2. Niech G będzie grupą symetrii trójkąta równobocznego którego środek ciężkości jest w początku układu współrzędnych. Czy G ma nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą dla naturalnej reprezentacji G na przestrzeni dwuwymiarowej.

3. Znajdź klasy sprzeżoności, tzn. zbiory postaci $[x] = \{gxg^{-1} : g \in G\}$ dla grup z zadań 1 i 2.

4. Sprawdź że definicja pierścienia $R[G]$ zachowuje sens w przypadku gdy G jest tylko półgrupą. Niech G będzie półgrupą nieujemnych liczb całkowitych. Uzasadnij że $R[G]$ jest izomorficzny z pierścieniem wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach w R.

5. Niech S będzie pierścieniem funkcji wymiernych jednej zmiennej x o współczynnikach w ciele K których mianownik jest potęgą x (ten pierścień bywa nazywany pierścieniem wielomianów Laurenta). Niech G będzie grupą liczb całkowitych z dodawaniem. Uzasadnij że $K[G]$ jest izomorfficzne z S.

6. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech V będzie przestrzenią funkcji zespolonych na zbiorze $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Operator A zadajemy wzorem $(Af)(j) = \exp(2\pi ij/k)f(j)$ gdzie i jest jednostką urojoną. Opisz grupę G generowaną przez A. Opisz podprzestrzenie niezmiennicze dla G.

7. Niech k, V i A będą jak wyżej. Operator B definujemy wzorem $(Bf)(j) = f(j+1)$ dla $j < k-1$ i $(Bf)(k-1) = f(0)$ (innymi słowy dodawanie indeksów jest modulo k). Opisz grupę H generowaną przez A i B. Uzasadnij że H nie ma nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych.

8. Niech operator A na $V = \mathbb{Q}^n$ będzie zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reprezentację ρ grupy addytywnej $\mathbb{Z}$ definiujemy wzorem $\rho(n) = A^n$. Uzasadnij że operator zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

należy do obrazu reprezentacji. Wywnioskuj stąd opis podprzestrzeni niezmienniczych dla ρ.

9. Niech ρ będzie reprezentacją $\mathbb{Z}$ na przestrzeni wektorowej V. Niech $A = \rho(1)$. Uzasadnij że jeśli wektory $v, Av, A^2v, \dots$ są liniowo niezależne to V zawiera kopię reprezentacji regularnej. Wywnioskuj stąd że dowolna reprezentacja $\mathbb{Z}$ na przestrzeni wektorowej albo zawiera reprezentację skończenie wymiarową albo kopię reprezentacji regularnej. Wyjaśnij co się dzieje gdy V to przestrzeń zespolonych wielomianów trygonometrycznych, tzn. V składa się z funkcji postaci $\sum c_k \exp(kix)$ gdzie suma jest skończona, k całkowite, i jest jednoską urojoną, x jest zmienną zaś $\rho(1)$ to operator mnożenia przez $\exp(ix)$.

10. Niech R będzie zbiorem operatorów różniczkowych postaci $\sum c_{j,k}x^j\partial_x^k$ gdzie suma jest skończona zaś j i k są liczbami naturalnymi. Uzasadnij że R jest pierścieniem z naturalymi działaniami, że można naturalnie zdefiniować działanie elementów R na wielomianach i że otrzymany w ten sposób moduł jest prosty.

11 Grupa wolna. Niech S będzie zbiorem symboli. Dla każdego $s \in S$ przez s^{-1} oznaczymy symbol ze zbioru S^{-1} rozłącznego z S. Skończony ciąg elementów zbioru $A = S \cup S^{-1}$ nazywamy słowem. Mówimy że słowo jest zredukowane jeśli nie występuje w nim na sąsiednich pozycjach para ss^{-1} lub para $s^{-1}s$. Słowo które nie jest zredukowane możemy zredukować usuwając pary jak wyżej. Na zbiorze słów zredukowanych wprowadzamy mnożenie w ten sposób że najpierw piszemy po kolei dwa słowa, a potem redukujemy wynik. Jako jedynkę bierzemy słowo puste. Uzasadnij że w ten sposób otrzymamy grupę. Uzasadnij że jeśli S ma co najmniej dwa elementy to klasy sprzężoności elementów różnych od jedynki są nieskończone.

Wskazówka: Najpierw zobacz że elementy A działają (dają odzworowania) na zbiorze słów zredukowanych.