1. Niech K będzie ciałem. Uzasadnij że K jest modułem prostym jako moduł nad sobą. Uzasadnij że $\mathbb{Z}$ nie jest modułem prostym ani nawet sumą prostą modułów prostych jako moduł nad sobą.

2. Wiedząc że operator splatający dla reprezentacji odpowiada homomorfizmowi modułów, sformułuj definicję operatora splatającego w termianch reprezentacji.

3. Niech k będzie pierścieniem bez dzielników zera (lub ciałem). Uzasadnij że element pierścienia grupowego $k[G]$ jest w centrum $k[G]$ wtedy i tylko wtedy gdy jako funkcja na G jest stały na klasach sprzężoności. Uzasadnij że jeśli G jest grupą wolną generowaną przez dwa lub więcej elementów to centrum $k[G]$ jest równe k

4. Niech G będzie grupą skończoną zaś k ciałem. Uzasadnij że $k[G]$ jest skończoną sumą prostą $k[G]$ modułów nierozkładalnych (tzn. takich które nie da się zapisać jako nietrywialna suma prosta).

5. Niech H będzie podgrupą G i niech k będzie pierścieniem przemiennym. Uzasadnij że $k[G]$ jest $k[H]$ modułem wolnym (tzn. jest sumą prostą modułów izomorficznych z $k[H]$).
Wskazówka: Rozważ rozkład G na warstwy względem H.

6. Niech $G = S(n)$ będzie grupą permutacji n elementów. Element $x \in G$ zapiszemy jako iloczyn cykli rozłącznych. Dla dowolnego ustalonego $g \in G$ jak wygląda zapis gxg^{-1} jako iloczyn cykli rozłącznych. Wywnioskuj stąd opis klas sprzężoności w G. Ile klas sprzężoności ma $S(8)$?

7. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem k i niech R będzie podpierścieniem pierścienia operatorów liniowych na V zwierającym jedynkę (tzn. operator identycznościowy). Uzasadnij że istnieje grupa G i reprezentacja ρ grupy G na V taka że R jest obrazem pierścienia grupowego. Czy jako G zawsze można wziąść grupę skończoną?

8. Niech M będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem k i niech $R \subset \mathrm{End}_k(M)$ będzie podalgebrą nad k. Uzasadnij że dowolny endomorfizm $h \in \mathrm{End}_R(M)$ można przedstawić elementem $H \in \mathrm{End}_k(M)$ takim że $\alpha H = H\alpha$ dla dowolnego $\alpha \in R$. Jak wygląda $\mathrm{End}_R(M)$ jeśli R składa się z macierzy diagonalnych?