1. Rozważamy reprezentacje nieprzywiedlne grupy D_n. Zakładamy że $k \neq -k \mod n$. Uzasadnij że przypadek dla $\rho(s)v = v$ i $\rho(s)v = -v$ prowadzą do równoważnych reprezentacji.

2. Sprawdź że $5^3 \mod 31 = 1$. Dla $i \in \mathbb{Z}_3$ niech $\alpha(i)$ będzie automorfizmem $\mathbb{Z}_{31}$ zadanym wzorem $\alpha(i)(m) = 5^i m$. Wtedy wzór

$$(z_1, m_1)(z_2, m_2) = (z_1 z_2, \alpha(z_2) m_1 m_2).$$

zadaje na $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{31}$ strukturę grupy. Uzasadnij że reprezentacje nieprzywiedlne tej grupy nad liczabami zespolonymi są albo wymiaru 3 albo wymiaru 1.

3. Uzasadnij że jeśli moduł M ma skończony rozkład na sumę prostą modułów prostych to rozkład ten jest jednoznaczny, tzn. można znaleźć 1-1 odpowieniość między składnikami rozkładów taką że odpowiadające sobie składniki są izomorficzne.

4. Uzasadnij że grupa skończona jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy każda jej reprezentacja nieprzywiedlna nad ciałem algebraicznie domkniętym K charakterystyki nie dzielącej $|G|$ jest jednowymiarowa.

Wskazówka: By pokazać przemienność G użyj to że $K[G]$ można przedstawić jako sumę prostą modułów prostych (czyli reprezentacji nieprzywiedlnych).

5. Niech M będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem k i niech $R \subset \mathrm{End}_k(M)$ będzie podalgbrą nad k. Uzasadnij że R jest pierścieniem półprostym (tzn. jest modułem półprostym nad sobą) wtedy i tylko wtedy gdy M jest R-modułem półprostym.

6. Niech R będzie pierścieniem. Radykałem Jacobsona N pierścienia R nazywamy przekrój wszystkich maksymalnych ideałów lewostronnych w R. Uzasadnij że N jest ideałem obustronnym i że można zdefiniować N jako przekrój wszystkich maksymalnych ideałów prawostronnych. Uzasadnij że jeśli M jest R-modułem prostym to $NM = \{0\}$. Uzasadnij że jeśli R jest pierścieniem półprostym to $N = \{0\}$.