1. Uzasadnij że jeśli K jest ciałem liczb zespolonych, G jest grupą skończoną, χ jest charakterem reprezentacji skończenie wymiarowej ρ grupy G, to $\chi(g^{-1}) = \bar{\chi}(g)$ gdzie $\bar{\chi}$ oznacza sprzężenie zespolone.

Wskazówka: Użyj to że $\rho(g)$ można zapisać w postaci diagonalnej.

2. Niech $G = \mathbb{Z}_3$ będzie grupą 3 elementową. Uzasadnij że zdefiniowany na wykładzie iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nie jest dodatnio określony na $\mathbb{R}[G]$, tzn. istnieje element $f \in \mathbb{R}[G]$ taki że $\langle f, f \rangle < 0$.

3. Uzasadnij że jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki nie dzielącej mocy G to ilość klas izomorfizmu modułów prostych nad $k[G]$ jest równy wymiarowi centrum $k[G]$ (czyli mocy zbioru klas sprzężoności względem automorfizmów wewnętrznych G).

Wskazówka: Użyj twierdzenie Wedderburna (Lemat 2.3 z wykładu 4).

4. Opisz charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych grupy D_n. Czy charaktery przyjmują wartości rzeczywiste? Czy wymierne?

5. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, λ będzie dowolną reprezentacją skończenie wymiarową G, g elementem G, zaś l dodatnią liczbą całkowitą taką że $g^l = e$. Niech χ oznacza charakter λ. Uzasadnij że $\chi(g)$ jest sumą l-tych pierwiastków z 1, niezależnie od tego czy $\chi(g)$ się diagonalizuje (tzn. czy charakterystyka p ciała K dzieli moc G). Wywnioskuj stąd że jeśli $m > 0$ jest liczbą taką że $g^m = e$ dla dowolnego $g \in G$ to χ przyjmuje wartości w ciele $k[e_m]$ gdzie k jest ciałem prostym (tzn. k to $\mathbb{Q}$ jeśli K jest charakterystyki 0 lub k to $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ gdy K jest charakterystyki p) zaś e_m jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia m.

6. Niech η będzie charakterem skończenie wymiarowej reprezentacji ρ grupy skończonej G nad ciałem k. Uzasadnij że η jest homomorfizmem z G w $k - \{0\}$ wtedy i tylko wtedy gdy ρ jest jednowymiarowa.

7. Przyjmij za znany fakt że wymiar reprezentacji dzieli moc grupy. Bazując na podanym fakcie i tym że grupa alternująca A_5 ma 60 elementów i 5 klas sprzężoności, na twierdzeniu Wedderburna i wiedząc o reprezentacji trywialnej uzasadnij że wymiary reprezentacji A_5 to $1, 3, 3, 4, 5$.

8. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki nie dzielącej $|G|$. Niech Z oznacza centrum $k[G]$. Niech $A \in Z$ będzie elementem takim że jego działanie na Z diagonalizuje się tak że wszyskie wartości własne są różne. Uzasadnij że wektory własne są wielokrotnościami idempotentów e_i związanych z $k[G]$ modułami prostymi. Uzasadnij że A jak wyżej istnieje.

Uwaga: Oznacza to że znając strukturę Z można wyznaczyć e_i a więc i charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych bez dodatkowych informacji o $k[G]$.

9. W grupie $S(4)$ wyznacz mnożenie na centum $k[G]$, tzn. zapisz iloczyn klas sprzężoności jako sumę klas sprzężoności z odpowiednimi krotnościami.

10. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki p i niech G będzie grupą mocy p^k. Uzasadnij że każdy $k[G]$ moduł prosty jest trywialny.

Wskazówka: Dla grupy przemiennej opisz rozwiązania równania $x^p = 1$ z $x \in k$. Dla grupy nieprzemiennej przyjmij za znane że G ma nietrywialne centrum.

11. Niech A będzie skończoną grupą abelową traktowaną jako $\mathbb{Z}$-moduł. Również $\mathbb{Q}$ traktujemy jako $\mathbb{Z}$-moduł. Uzasadnij że $\mathbb{Q} \otimes A = \{0\}$.

Wskazówka: Użyj równość $(ka) \times q = a \times (kq)$.