1. Grupa permutacji $S(10)$ zbioru 10-cio elementowego $A = [1, \ldots, 10]$ w naturnaly sposób działa na $A \times A$. Niech λ oznacza reprezentację na $C(A)$ (gdzie $C(A)$ to funkcje zespolone na A) taką że $\lambda(g)\delta_a = \delta_{g(a)}$. Niech η oznacza reprezentację na $C(A \times A)$ zbudowaną podobnie lecz używając działanie na $A \times A$. Uzasadnij że η jest równoważne $\lambda \otimes \lambda$.

2. Uzasadnij że reprezentacja regularna to reprezentacja indukowana z trywialnej reprezentacji podgrupy trywialnej $S = \{e\}$.

3. Uzasadnij że jeśli ciało k jest algebraicznie domknięte i charakterystyki 0 zaś G jest skończona, to charakter reprezentacji χ jest charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej wtedy i tylko wtedy gdy $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. Wywnioskuj stąd że produkt tensorowy reprezentacji nieprzywiedlnych G i H jest reprezentacją nieprzywiedlną $G \times H$.

4. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętem charakterystyki nie dzielącej $|G|$, A będzie podgrupą przemienną G, M będzie reprezentacją nieprzywiedlną G na przestrzeni wektorowej nad k. Uzasadnij że $\dim_k(M) \leq \frac{|G|}{|A|}$. Wskazówka: M jest zawarte w reprezentacji indukowanej z A.

5. Niech G i H będą grupami skończonymi zaś k ciałem algebraicznie domkniętym charakterystki nie dzielącej mocy G i H. Uzasadnij że każda reprezentacja nieprzywiedlna nad k produktu $G \times H$ jest iloczynem tensorowym reprezentacji.

Wskazówka: użyj rozkładu reprezentacji regularnej.

6. Niech ρ będzie reprezentacją grupy G na skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{Q}$. Uzasadnij że V zawiera skończenie generowalny $\mathbb{Z}$ moduł który generuje V nad $\mathbb{Q}$. Wywnioskuj stąd że G ma co najmniej jedną reprezentację nad $\mathbb{Z}$ która po rozszerzeniu skalarów do $\mathbb{Q}$ daje reprezentację równoważną z ρ.

Wskazówka: Rozważ orbitę bazy V.

7. Dla przestrzeni wektorowych M i N przez $\mathrm{Hom}(M, N)$ oznaczymy przestrzeń odwzorowań liniowych z M w N. Niech M i N będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad k i niech M^* oznacza $\mathrm{Hom}(M, k)$. Uzasadnij że $\mathrm{Hom}(M, N)$ jest naturalnie izomorficzne z $M^* \otimes N$.

8. Niech M będzie modułem wielomianów nad pierścieniem przemiennym R zmiennych $x_1, \ldots, x_l$ zaś N będzie będzie modułem wielomianów zmiennych $y_1, \ldots, y_m$. Uzasadnij że $M \otimes N$ jest naturalnie izomorficzne z modułem wielomianów zmiennych $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m$.

9. Niech M_1 i M_2 będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{C}$ z dodatnio określonymi hermitowskimi iloczynami skalarnymi $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$. Uzasadnij że wzór

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_1 \langle x_2, y_2 \rangle_2$$

zadaje na $M_1 \otimes M_2$ dodatnio określony hermitowski iloczyn skalarny. Innymi słowy, produkt tensorowy przestrzeni unitarnych ma naturalną strukturę przestrzeni unitarnej.