Uwaga: część zadań to materiał rozszerzający który nie pojawił się na wykładzie. Warto przeczytać i zrozumieć treść tych zadań nawet jeśli się ich nie zrobi.

1. Uzasadnij że grupa $SL(2, q)$ naturalnie działa na przestrzeni $q + 1$ elementowej. Opisz rozkład otrzymanej dzięki temu działaniu reprezentacji nieprzywiedlnej. Uzasadnij że dla $q > 2$ działanie jest przez permutacje parzyste. Opisz dokładniej strukturę $SL(2, q)$ dla $q \in \{3, 4, 5\}$.

Wskazówka: przestrzeń rzutowa.

2. Niech N będzie abelowym dzielnikiem normalnym w G zaś P podgrupą dopełniczą, tzn. $P \cap N = \{e\}$ i $PN = G$. Niech χ będzie charakterm N. Niech M oznacza podgrupę P składającą się z elementów takich że $\chi(g^{-1}ng) = \chi(n)$ dla wszystkich $n \in N$. Niech θ będzie reprezentacją nieprzywiedlną M. Uzasadnij że reprezentacja indukowana z produktu tensorowego $\chi \otimes \theta$ (który tu redukuje się do zwykłego mnożenia) jest nieprzywiedlna. Uzasadnij że każda reprezentacja nieprzywiedlna G jest takiej postaci. Jak to się ma do grupy M z notatek o $SL(2, q)$? Opisz z tego punktu widzenie reprezentacje grupy dihedralnej (gdzie $b^{-1}ab = a^{-1}$, $b^2 = e$, $a^k = e$). Opisz reprezentacje grupy gdzie N to przestrzeń $\mathbb{Z}_5^3$, zaś P to permutacje wektorów bazy w $\mathbb{Z}_5^3$ ($\mathbb{Z}_p$ oznacza ciało p elementowe które traktujemy jako grupę z dodawaniem).

3. Niech $G = Z_2$ będzie grupą dwuelementową. G działa na $\mathbb{Q}^2$ zamieniając wektory bazowe e_1 i e_2. Niech M_1 będzie $\mathbb{Z}$ modułem generowanym przez e_1 i e_2. Niech M_2 będzie $\mathbb{Z}$ modułem generowanym przez $e_1 + e_2$ i $e_1 - e_2$. Uzasadnij że otrzymane w ten sposób reprezentacje G nad $\mathbb{Z}$ nie są równoważne.

Wskazówka: Użyj redukcję modulo 2 i rozważaj reprezentacje nad Z_2.

4. Niech G_m będzie podzbiorem grupy $SL(n, \mathbb{Z})$ składającym się z macierzy postaci $I + mA$ gdzie I to macierz identycznościowa, m to dodatnia liczba całkowita, zaś A to macierz całkowitoliczbowa taka że suma ma wyznacznik 1. Uzasadnij że G_m jest podgrupą normalną w $SL(n, \mathbb{Z})$. Uzasadnij że $G_{p^k}/G_{p^{k+1}}$ gdzie p jest liczbą pierwszą jest grupą przemienną. Wywnioskuj stąd że przekrój skończonej podgrupy $H \subset SL(n, \mathbb{Z})$ z G_p jest grupą rozwiązalną.

5. Uzasadnij że izometria $\mathbb{R}^3$ ma jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą. Wywnioskuj stąd że taka izometria jest obrotem lub złożeniem obrotu z odbiciem wzgledem osi obrotu lub się diagonalizuje. Uzasadnij że jeśli izometria g przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma ślad będący liczbą całkowitą, to $g^m = I$ dla pewnego $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

6. Uzasadnij że naturalne działanie grupy symetrii trójkąta na przestrzeni wymiaru 2 jest reprezentacją indukowaną z reprezentacji jednowymiarowej podgrupy jeśli reprezentacje rozważamy nad $\mathbb{C}$. Uzasadnij że nie jest to reprezentacja indukowana z reprezentacji nad $\mathbb{R}$.

7. Uzasadnij że jeśli G jest grupą skończoną działającą na $\mathbb{R}^n$ to istnieje wielościan wypukły W taki że G jest podgrupą grupy symetrii W. W można wybrać tak by G działało tranzytywnie na wierzchołkach W. Uzasadnij na przykładzie że jest nieskończenie wiele klas podobieństwa możliwych W.

8. Niech k będzie ciałem charakterystyki p i niech G będzie grupą mocy p^k. Uzasadnij że reprezentacja trywialna występuje w $k[G]$ z krotnością 1. Uzasadnij że $k[G]$ jest $k[G]$ modułem nierozkładalnym (tzn. nie daje się przedstawić w postaci sumy prostej nietrywialnych podmodułów).

Wskazówka: Druga część to wniosek z pierwszej i zadania z listy 4.

9. Niech k będzie ciałem charakterystyki p zaś G grupą mocy mp^k gdzie m jest względnie pierwsze z p. Uzasadnij że jeśli M jest składnikiem prostym $k[G]$ to M ma wymiar podzielny przez p^k.

Wskazówka: Przyjmij za znane istnienie podgrupy Sylowa, tzn. podgrupy H mocy p^k i użyj wyniki poprzednich zadań.

10. Niech G będzie grupą skończoną zaś $g \in G$ elementem rzędu mp^k (tzn. $g^{mp^k} = e$) gdzie p jest liczbą pierwszą zaś m jest względnie pierwsze z p. Uzasadnij że g można zapisać w postaci $g = uw$ gdzie u jest rzędu m, w jest rzędu p^k i $uw = wu$. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nad ciałem charakterystyki p. Uzasadnij że $\chi(g) = \chi(u)$.

Wskazówka: $1 = am + bp^k$ z całkowitymi a i b. Rozpisz g^1. W reprezentacji zapisz element w postaci Jordana.

11. Niech G będzie grupą skończoną. Uzasadnij że jeśli $g \neq g^{-1}$ a klasa sprzężoności g równa się klasie sprzężoności g^{-1} to moc tej klasy jest parzysta. Uzasadnij że jeśli grupa G ma moc nieparzystą to istnieje g taki że klasa sprzężoności g jest różna od kasy sprzężoności g^{-1}. Wywnioskuj stąd że na G istnieje charakter nad $\mathbb{C}$ który przyjmuje choć w jednym punkcie wartość nie będącą liczbą rzeczywistą.

Wskazówka: W ostatniej części użyj twierdzenie Artina z wykładu.

12. Jak się zmienią wyniki o $SL(2, q)$ dla q będącego potęgą 2?

13. Niech k będzie ciałem zaś ρ będzie reprezentacją grupy G na przestrzeni wektorowej V nad k. Niech P będzie przestrzenią rzutową otrzymaną z V, tzn. $P = (V - \{0\})/k_*$ gdzie iloraz jest względem działamia grupy multyplikatywej $k_* = k - \{0\}$ ciała k. Innymi słowy P to zbiór prostych przechodzących przez 0 w V. Mając dane przekształcenie liniowe na V w naturalny sposób otrzymujemy przekształcenie P (tak otrzymane przekształcenia nazywamy przekształceniami rzutowymi). Uzasadnij że reprezentacja ρ w naturalny sposób zadaje reprezentację rzutową tzn. homomorfizm z G w grupę przekształceń rzutowych. W takiej sytuacji mówimy że reprezentacja rzutowa jest otrzymana z reprezentacji liniowej. Powiemy że zbiór $U \subset P$ jest podprzestrzenią jeśli U jest obrazem niezerowej podprzestrzeni $W \subset V$ przez przekształcenie ilorazowe. Powiemy że reprezentacja rzutowa na P jest nieprzywiedlna jeśli jedyną podprzestrzenią niezmienniczą jest całe P. Uzasadnij że reprezentacja rzutowa otrzymana z reprezentacji liniowej ρ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy ρ jest nieprzywiedlna.

14. Rozważmy grupę Heisenberga H nad Z_p, tzn. grupę gdzie mnożenie zadane jest wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + x_1 y_2)$$

gdzie współrzędne są z pierścienia Z_p reszt modulo p. Niech C będzie centrum H. Uzasadnij że H ma wierną reprezentację nieprzywiedlną nad $\mathbb{C}$ i że ta reprezentacja nie zawiera reprezentacji jednowymiarowych. Uzasadnij że H/C ma reprezentaję przekształeniami rzutowymi taką że nie pochodzi ona z reprezentacji liniowej (tzn. nie jest złożeniem reprezentacji liniowej z odwzorowaniem ilorazowym z grupy przekształceń liniowych w grupę przekształceń rzutowych).

15. Bazując na podanym opisie sprawdź że $SL(2,5)$ ma reprezentację wymiaru 2, zaś dla $G = SL(2,5)/\{I, -I\}$ najmniejszy wymiar reprezentacji nietrywialnej to 3. Wywnioskuj stąd że istnieje homomorfizm z G w przekształcenia rzutowe przestrzeni dwuwymiarowej (reprezentacja rzutowa), który nie pochodzi od reprezentacji liniowej.

Komentarz: $SL(2,5)$ to tak zwane nakrycie uniwersalne G, w szczególności każda reprezentacja rzutowa G pochodzi z reprezentacji liniowej $SL(2,5)$.