1. Niech G będzie grupą Heisenberga, tzn. G to $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem:

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

Uzasadnij że miara Lebesque'a jest dwustronnie niezmiennicza.

2. Niech G to będzie $\mathbb{R}^2$ z mnożeniem zadanym wzorem:

$$(s_1, x_1)(s_2, x_2) = (s_1 + s_2, \exp(s_2)x_1 + x_2)$$

Uzasadnij że Lebesque'a jest niezmiennicza na przesunięcia lewostronne. Znajdź miarę niezmienniczą na przesunięcia prawostronne.

3. Całkowitoliczbowa grupa Heisenberga to $\mathbb{Z}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 - (x_1 y_2))$$

Niech $V = L^2(\mathbb{Z})$. Na V zadajemy reprezentację wzorem

$$(\rho((x, y, z))v)(u) = \exp(ia(yu + z))v(u - x)$$

gdzie a jest ustaloną rzeczywistą liczbą niewymierną. Sprawdź że jest to reprezentacja.

4. Dla grupy z zadania 2 zadajemy reprezentację na $L^2(\mathbb{R})$ wzorem

$$(\rho((s, x))v)(u) = \exp(ix \exp(u - s))v(u - s).$$

Sprawdź że jest to reprezentacja.

5. Niech A_0 będzie algebrą zespolonych funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ mających granicę 0 w nieskończoności z mnożeniem i dodawaniem punktowym. A_0 ma naturalną reprezentację ρ_0 na $L^2(\mathbb{R})$ zadaną przez mnożenie punktowe. Dla $t \in \mathbb{R}$ operator przesunięcia S_t zadajemy wzorem $(S_t f)(x) = f(x - t)$. Niech A będzie algebrą operatorów na $L^2(\mathbb{R})$ generowaną przez przesunięcia S_t, $t \in \mathbb{R}$ oraz $\rho_0(A_0)$ (tzn. obraz A_0 przez reprezentację ρ_0). Uzasadnij że naturalne działanie A na $L^2(\mathbb{R})$ jest nieprzywiedlne, tzn. nie ma nietrywialnych domkniętych podprzestrzeni niezmienniczych.