1 Niech G będzie grupą lokalnie zwartą zaś K zwartą podgrupą G. Uzasadnij że lewostronnie niezmiennicza miara lokalnie skończona na G (miara Haara) jest niezmiennicza na prawostrone przesunięcia przez elementy K.

Wskazówka: Ciągły homomorfizm z K w liczby rzeczywiste dodatnie jest stały.

2 Niech G będzie grupą lokalnie zwartą zaś K zwartą podgrupą G. Uzasadnij że funkcja $f \in L^1(G)$ jest dwustronnie niezmiennicza na przesunięcia o elementy z K (krócej: dwustronnie K-niezmiennicza) wtedy i tylko wtedy gdy $f = \chi_K * f * \chi_K$ gdzie χ_K oznacza miarę Haara na K. Wywnioskuj stąd że funkcje dwustronnie K-niezmiennicze tworzą podalgebrę w $L^1(G)$.

Definicja: Parę grup (G, K) gdzie G jest lokalnie zwarta zaś K jest zwarta nazywamy parą Gelfanda wtedy i tylko wtedy gdy algebra funkcji dwustronnie K-niezmienniczych jest przemienna.

Definicja: Powiemy że grupa lokalnie zwarta G jest unimodularna wtedy i tylko wtedy gdy lewostronnie niezmiennicza miara Haara na G jest prawostronnie niezmiennicza na przesunięcia o elementy G.

3 Niech (G, K) będzie parą grup gdzie G jest lokalnie zwarta i unimodularna zaś K jest zwarta. Zakładamy że dla każdego $g \in G$ mamy $g^{-1} \in KgK$. Uzasadnij że wtedy para (G, K) jest parą Gelfanda. Sprawdź że para $(SL(2, \mathbb{R}), SO(2, \mathbb{R}))$ (para macierze 2 na 2 o wyznaczniku 1 i macierze obrotów) jest parą Gelfanda.

Wskazówka: Przy podanym założeniu dla funkcji dwustronnine K-niezmienniczych f mamy $f(g) = f(g^{-1})$. Dla $G = SL(2, \mathbb{R})$ użyj fakt że dowolny $m \in G$ można zapisać w postaci $m = k_1 d k_2$ gdzie $k_1, k_2 \in K = SO(2, \mathbb{R})$ i że $d^1 = k^{-1} d k$ gdzie k jest obrotem o $\pi/2$.

4. Niech M będzie grupą zwartą, $G = G \times G$ zaś K będzie diagonalną podgrupą w G (tzn. zbiorem elementów postaci (m, m) gdzie $m \in M$). Uzasadnij że para $(G.K)$ jest parą Gelfanda.

Wskazówka: Algebra funkcji dwustronnie K-niezmienniczych na G jest izomorficzna z algebrą funkcji centralnych na M.

5. Niech G będzie grupą, K podgrupą G zaś ρ reprezentacją unitarną G na przestrzeni Hilberta H. Zakładamy że podprzestrzeń H_K wektorów z H niezmienniczych na działanie K jest jednowymiarowa i cykliczna dla G, tzn. $\mathbb{C}[G]H_K$ jest gęste w H. Uzasadnij że ρ jest nieprzywiedlna.

6. Niech G będzie grupą, K podgrupą G zaś ϕ funkcją dodatnio określoną na G. Uzasadnij że ϕ jest dwustronnie K-niezmiennicza wtedy i tylko wtedy gdy wektor cykliczny reprezentacji cyklicznej odpowiadającej ϕ jest K-niezmienniczy.

7. Niech G będzie grupą zaś ρ reprezentacją mającą wektory cylkiczne v_1 i v_2. Uzasadnij że jeśli ρ jest nieprzywiedna i mamy $\phi_{v_1} = \phi_{v_2}$ gdzie

$$\phi_{v_i} = \langle \rho(g)v_i, v_i \rangle$$

to istnieje liczba zespolona α taka że $v_1 = \alpha v_2$.

8. Niech (G, K) będzie parą Gelfanda, niech A będzie podalgebrą $L^1(G)$ składającą się z funkcji dwustronnie K-niezmienniczych i niech ϕ będzie ciągłą dwustronnie K-niezmienniczą funkcją dodatnio określoną na G taką że $\phi(e) = 1$ gdzie e jest jedynką w G. Uzasadnij że odpowiednia reprezentacja cykliczna G jest nierozkładalna wtedy i tylko wtedy gdy ϕ jest generuje promień ekstremaly stożka funkcjonałów dodatnich na A. Równoważnie, odpowiednia reprezentacja cykliczna G jest nierozkładalna wtedy i tylko wtedy gdy podprzestrzeń wektorów K-niezmienniczych jest jednowymiarowa. Równoważnie odpowiednia reprezentacja cykliczna G jest nierozkładalna wtedy i tylko wtedy gdy ϕ daje homomorfizm z A w C.

Jeśli ϕ spełnia jeden z równoważnych warunków wyżej to mówimy że ϕ jest funkcją sferyczną a odpowiednią reprezentację nazywamy reprezentacją sferyczną.

8. Niech (G, K) będzie parą Gelfanda. Wtedy przestrzeń Ω funkcji sferycznych dla pary (G, K) z topologią zbieżności jednostajnej na zbiorach zwartych jest lokanie zwarta. Jeśli ϕ ciągłą dwustronnie K-niezmienniczą funkcją dodatnio określoną na G to istnieje dokładnie jedna miara dodatnia μ na Ω taka że

$$\phi(g) = \int_\Omega \omega(g) d\mu(\omega).$$

Komentarz: Oznacza to że reprezentacja cykliczna odpowiadająca ϕ jest całką prostą reprezentacji sferycznych i że rozkład na całkę prostą jest jednoznaczny.

9. Grupę izometrii $\mathbb{R}^2$ można zapisać jako zbiór par (z, t) gdzie $z, t \in \mathbb{C}$ i $|z| = 1$. Mnożenie jest zadane wzorem

$$(z_1, t_1)(z_2, t_2) = (z_1 z_2, z_2^{-1} t_1 + t_2).$$

Zadajemy reprezentację na $L^2(S)$ gdzie $S = \{z : |z| = 1\}$ wzorem

$$\rho((z, t))v(u) = \exp(ia\Re(zt/u))v(u/z)$$

gdzie $a > 0$ zaś $\Re$ oznacza część rzeczywistą. Sprawdź że jest to reprezentacja. Uzasadnij że jest ona nieprzywiedlna

10. Niech G działa na przestrzeni z miarą probabilistyczną M, tzn. dana jest funkcja $m : (G, M) \to M$ taka że dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ i $x \in M$ mamy $m(g_1, m(g_2, x)) = m(g_1 g_2, x)$. Zakładamy że działanie zachowuje miarę, tzn. przy ustalonym $g \in G$ i dowolnym mierzalnym $A \subset M$ mamy

$$|A| = |\{m(g, x) : x \in A\}|.$$

Zadajemy reprezentację G w $L^2(M)$ wzorem

$$\rho(g)v(x) = v(m(g^{-1}, x))$$

Sprawdź że jest to reprezentacja. Uzasadnij że ta reprezentacja zawiera reprezentację trywialną z krotnością 1 wtedy i tylko wtedy gdy działanie G na M jest ergodyczne tzn. wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{g \in G} |A - \{m(g, x) : x \in A\}| = 0$$

implikuje że $A = M$ lub $A = \emptyset$. Sprawdź że gdy a jest liczbą niewymierną, $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}$, zaś $m(g, x) = x - ag$ to powyższy warunek jest spełniony.