1 Przykłady grup nieskończonych

Teorię reprezentacji grup skończonych rozważaliśmy w sposób czysto algebraiczny. W przypadku grup nieskończonych naturalne jest wprowadzenie topologii na grupie i ograniczenie się do ciągłych reprezentacji unitarnych, tzn. takich reprezentacji że elementy grupy przechodzą na operatory unitarne.

Definicja 1.1 *Grupę G z topologią nazywamy grupą topologiczną jeśli operacje grupowe są ciągłe, tzn. mnożenie (jako funkcja z $G \times G$ w G) i branie elementu odwrotnego są funkcjami ciągłymi.*

W przykładach poniżej rozpatrujemy topologię zbieżności względem miary. Niech Ω będzie przestrzenią z miarą μ. Powiemy że zbiór A jest lokalnie miary 0 jeśli przekrój A z dowolnym zbiorem miary skończonej jest miary 0. Niech V bedzie przestrzenią klas równoważności funkcji mierzalnych o wartościach w ośrodkowej przestrzenie metrycznej gdzie utożsamiamy funkcje różniące się tylko na zbiorze lokalnie miary 0. Bazę otoczeń dla $f \in V$ dają zbiory $U_{f,\varepsilon,E}$ postaci

$$U_{f,\varepsilon,E} = \{v \in V : \mu(\{t \in E : d(v(t), f(t)) > \varepsilon\}) < \varepsilon\}$$

gdzie E przebiega podzbiory mierzalne Ω miary skończonej, zaś $\varepsilon > 0$ jest liczbą rzeczywistą.

Powiemy że miary μ na Ω jest σ skończona jeśli Ω jest przeliczalną sumę zbiorów o mierze skończonej. Równoważnie, Ω jest przeliczalną sumę rozłącznych zbiorów o mierze skończonej. Mianowicie, jeśli $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, to biorąc

$$G_n = E_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j$$

mamy również $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ i G_n są rozłączne. Oczywiście jeśli E_j mają miarę skończoną to również G_n mają miarę skończoną.

Jeśli miara na Ω jest σ skończona to topologia zbieżności względem miary jest metryzowalna. Ponadto wtedy ciąg v_n jest zbieżny według miary do v wtedy i tylko wtedy gdy z każdego podciągu v_n można wybrać podciąg zbieżny punktowo prawie wszędzie do v.

Przykłady:

- Niech G_1 bedzie grupą funkcji mierzalnych na $\mathbb{R}$ o module równym 1 (tzn. $\forall_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| = 1$) z mnożeniem punktowym jako działaniem grupowym i z topologią zbieżności względem miary.

- Niech G_2 bedzie grupą funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ o module równym 1 z mnożeniem punktowym jako działaniem grupowym i topologią zbieżności jednostajnej na podziorach zwartych.

- Niech G_3 będzie przestrzenią rzeczywistych funkcji mierzalnych na $\mathbb{R}$ z dodawaniem punktowym jako działaniem grupowym i z topologią zbieżności względem miary.

G_1 działa przez mnożenie punktowe na $L^2(\mathbb{R})$ (na $\mathbb{R}$ bierzemy miarę Lebesgue'a). Również G_2 działa przez mnożenie punktowe na $L^2(\mathbb{R})$. Dla $g \in G_3$ działanie na L^2 definiujemy jako mnożenie przez $\exp(ig)$.

Lemat 1.2 *Jeśli $H \subset L^2$ jest domkniętą podprzestrzenią niezmienniczą dl jednego z działań wyżej, to H jest zamknięta na mnożenie przez ograniczone zespolone funkcje mierzalne. Ponadto istnieje zbór mierzalny E taki że*

$$H = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall_{t \in E} f(t) = 0\} = 1_E L^2(\mathbb{R})$$

Uwaga: z lematu wyżej wynika że H nie zawiera mnimalnej podprzestrzeni niezmienniczej, w szczególności reprezentacja na H nie może być sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

Dowód. $G_2 \subset G_1$, przy tym G_2 jest gęsta w G_1. Mianowicie, zbieżność punktowa implikuje zbieżność wedug miary, więc domkniecie G_2 zawiera granice punktowe elementów z G_2. Zawiera też granice takich granic, czyli domknięcie daje klasę funkcji zamkniętą na branie granic punktowych. Daje to wszystkie funkcje Borelowsko mierzalne o module 1. Dowolna funkcja mierzalna równi się od funkcji Borelowsko mierzalnej tylko na zborze miary zero, a wiec faktycznie dostaniemy wszystkie elementy G_1. Podobnie, biorąc gałąź główną logarytmu można zapisać dowolne $g \in G_1$ jako $g = \exp(i(\log(g)/i))$, gdzie $\log(g)/i$ jest rzeczywistą funkcją mierzalną. A więc wystarczy pokazać wynik dla działania G_1. Jeśli w przyjmuje wartości w $[-1, 1]$ to biorąc $s = \mathrm{arc}cos(w)$ mamy

$$w = \cos(\arccos(w)) = \cos(s) = \frac{1}{2}\left(\exp(is) + \exp(-is)\right).$$

Zarówno $\exp(is) \in G_1$ jak i $\exp(-is)G_1$, a więc mnożanie przez w zachowuje H. Jako że H jest przestrznią wektorową nad $\mathbb{C}$ to jest zamknięte na mnożenie przez liczby zespolne (a więc i lczby rzeczywiste). Dowolną mierzalną funkcję rzeczywistą ograniczoną można zapisać w postaci $w = tw_1$ gdzie $t \in \mathbb{R}$ zaś w_1 przyjmuje wartości w $[-1, 1]$. A więc H jest zamknięte na mnożenie przez rzeczywiste ograniczone funkcje mierzalne. Funkcję zespoloną można zapisać w postaci $w = u + iv$ gdzie u i v są funkcjami rzeczywistymi, więc H jest również zamknięte na mnożenie przez ograniczone zespolne funkcje mierzalne. Pozostała część jest przypadkiem szczególnym następnego lematu. $\square$

Lemat 1.3 . *Niech Ω będzie przestrzenią z miarą σ-skończoną μ i niech H będzie domkniętą podprzestrzenią $L^2(\Omega)$ niezmienniczą na mnożenie przez ograniczone funkcje mierzalne. Wtedy istnieje podzbiór mierzalny $E \subset \Omega$ taki że*

$$H = \{f \in L^2(\Omega) : \forall_{t \in E} f(t) = 0\} = 1_E L^2(\Omega)$$

gdzie 1_E oznacza funkcję wskaźnikową zbioru E, tzn. $1_E(t) = 1$ dla $t \in E$ oraz $1_E(t) = 0$ dla $t \notin E$.

Dowód: Najpierw pokażemy lemat przy dodatkowym założeniu że miara $\mu(\Omega)$ jest skończona. Niech

$$V_f = \{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}$$

i niech $\lambda = \sup_{f\in H} \mu(V_f)$. Oczywiscie $\mu(V_f) \leq \mu(\Omega)$, więc λ jest skończone. Istnieje ciąg funkcji f_n takich że $\lambda = \sup_n \mu(V_{f_n})$. Niech

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{f_n}$$

Zauważmy że $|f_n| \in H$. Mianowicie, niech $u_n(t) = \bar{f}_n(t)/|f_n(t)|$ dla t takich że $f(t) \neq 0$ i $u_n(t) = 0$ gdy $f(t) = 0$. Wtedy u_n jest ograniczoną funkcją mierzalną, więc $u_n f_n \in H$. Lecz $u_n f_n = |f_n|$, czyli faktycznie $|f_n| \in H$. Następnie niech $g_j = \sum_{n=1}^{j} |f_n|$ i

$$E_j = \bigcup_{n=1}^{j} V_{f_n} = \{t \in \Omega : g_j > 0\}.$$

H jest przestrzenią wektorową więc $g_j \in H$. Pokażemy że $1_{E_j} \in H$. Niech

$$F_{j,m} = \{t : \Omega : g_j > 1/m\}$$

Oczywiście $1_{F_{j,m}} g_j^{-1}$ jest ograniczoną funkcją mierzalną, więc $1_{F_{j,m}} = (1_{F_{j,m}} g_j^{-1}) g_j \in H$. Mamy też

$$E_j = \sum_{m=0}^{\infty} F_{j,m}$$

i dla $l < m$ mamy $F_{j,l} \subset F_{j,m}$, czyli skoro miara E_j jest skończona to

$$\mu(E_j - F_{j,m}) \to 0$$

gdy $m \to \infty$. A więc

$$\|1_{E_j} - 1_{F_{j,m}}\|^2 = \int_{E_j - F_{j,m}} 1 \to 0$$

czyli 1_{E_j} jako granica $1_{F_{j,m}}$ należy do H. Podobnie dla $l < j$ mamy $E_l \subset E_j \subset E$ i E jest sumą E_j. Znowu jako że miara E jest skończona to 1_E jest granicą 1_{E_j} czyli $1_E \in H$.

Pokażemy teraz że $1_E L^2(\Omega) \subset H$. Niech $w \in 1_E L^2(\Omega) \subset H$ będzie dowolne, niech

$$W_n = \{t \in \Omega : |w(t)| < n\}$$

i niech $w_n = 1_{W_n} w$. Znowu w_n jest ograniczoną funkcją mierzalną, więc $w_n 1_E = w_n \in H$. $|w_n|^2$ jest monotonicznie rosnącym ciągiem funkcji zbiegającym punktowo do $|w|^2$, a więc na mocy twierdzenia o zbieżności monotonicznej

$$\int |w_n|^2 \to \int |w|^2$$

gdy n dąży do nieskończoności. A więc

$$\|w - w_n\|^2 = \int |w - w_n|^2 = \int_{E-W_n} |w|^2 = \int_E |w|^2 - \int_{W_n} |w|^2$$
$$= \int |w|^2 - \int |w_n|^2 \to 0$$

czyli w_n zbiegają w L^2 do w, czyli w jako granica w_n należy do H. To oznacza że faktycznie $1_E L^2(\Omega) \subset H$. Niech teraz $h \in H$ będzie dowolne. Jak poprzednio $|h| \in H$. Jako suma również $|h| + 1_E \in H$. Z definicji λ mamy

$$\mu(V_{|h|+1_E}) \leq \lambda.$$

Z określenia E wynika że $\mu(E) = \lambda$. A więc $\mu(V_{|h|} - E) = 0$. Oznacza to że modulo zbiór miary 0 funkcja h przyjmuje niezerowa wartości tylko na E, czyli $1_E h = h$. A więc $h \in 1_E L^2(\Omega)$. Jako że h było dowolne oznacza to że $H \subset 1_E L^2(\Omega)$ co kończy dowód w przypadku gdy Ω ma miarę skończoną.

W ogólnym przypadku jako że μ jest σ-skończona to istnieje ciąg rozłącznych zbiorów mierzalnych G_n o mierze skończonej taki że

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Niech $H_n = 1_{G_n} H$. Oczywiście że H_n jest zamknięte na mnożenie przez ograniczone funkcje mierzalne. Jest też podprzestrzenią domkniętą. Miara μ po ograniczeniu do zbioru G_n jest skończona. A więc stosując już udowodnioną część lematu widzimy że istnieją zbiory mierzalne E_n takie że $H_n = 1_{E_n}$. Teraz bierzemy $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dla dowolnego $h \in H$ mamy $1_{G_n} h = 1_{E_n} h$. Jako że G_n sumują się do Ω oznacza to że $h = 1_E h$, czyli $h \in 1_E L^2(\Omega)$, czyli $H \subset 1_E L^2(\Omega)$

Jako że E_n są rozłączne dla $f \in L^2(\Omega)$ mamy

$$\|1_E f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f|^2$$

i w szczególności szereg po prawej stronie jest zbieżny. Czyli

$$\|1_E f \sum_{n=1}^{j} 1_{E_n} f\|^2 = \sum_{n=j+1}^{\infty} \to 0$$

gdy $j \to \infty$. A więc

$$1_E f = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{E_n} f$$

gdzie zbieżność jest w $L^2(\Omega)$. Ale sumy częściowe szeregu powyżej należą do H (bo n-ty składnik sumy należy do H_n). Jako że H jest jest domknięte to $1_E f \in H$, czyli $1_E L^2(\Omega) \subset H$. Dla $h \in H$ mamy $1_{G_n} h = 1_{E_n} h$. $\square$

Grupa G_2 ma dużo reprezentacji nieprzywiedlnych, mianowicie dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $\omega_t(g) = g(t)$ zadaje homomorfizm w liczby zepolone o module 1. A więc mnożenie przez ω_t daje reprezentację jednowymiarową, czyli nieprzywiedlną. Rozważna reprezentacja jest tzw. *całką prostą* z reprezentacji ω_t.

Grupa G_3 nie ma żadnej ciągłej nietrywialnej reprezentacji nieprzywiedlnej. Mianowicie, dalej pokażemy że nieprzywiedlne reprezentacje unitarne grupy abelowej są jednowymiarowe. A więc reprezentacja nieprzywiedlna G_3 jest zadana przez homorfizm ω z G_3 w liczby zespolone o module 1. Ciągły homomorfizm ω z $\mathbb{R}$ w liczby zespolone o module 1 ma postać $\omega(t) = \exp(il(t))$ gdzie l jest ciągłym homomorfizmem z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ (można to sformułować mówiąc że ω ma ciągły logarytm). Przy tym l jest wyznaczone jednoznacznie przez ω. Konkretniej mamy $\omega(t) = \exp(iat)$ gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest wyznaczone jednoznacznie. Z powyższego wynika że ciągły homomorfizm ω z $\mathbb{R}^n$ w w liczby zespolone o module 1 ma postać $\omega(t) = \exp(il(t))$ gdzie l jest ciągłym homomorfizmem z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$. Mianowicie, $x \in \mathbb{R}^n$ można zapisać jako

$$x = \sum_{j=1}^{n} e_j x_j$$

gdzie e_j są bazą zaś x_j są współrzędnymi w bazie. Przy ustalonym j odwzorowanie $\omega_j(t) = \omega(te_j)$ daje ciągły homorfizm z $\mathbb{R}$ w liczby zespolone o module 1, czyli $\omega_j(t) = \exp(ia_j t)$. Wynika stąd że

$$\omega(x) = \omega(\sum_{j=1}^{n} e_j x_j) = \prod_{j=1}^{n} \omega_j(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \exp(ia_j x_j)$$

$$= \exp(i \sum_{j=1}^{n} a_j x_j) = \exp(il(x))$$

gdzie $l(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$.

Teraz można pokazać podobny wynik dla przestrzeni wektorowo-topologicznych V. Jeśli $v \in V$ to rozpatrujemy $\omega_v(t) = \omega(vt)$. Z wyniku dla $\mathbb{R}$ mamy $\omega_v(t) = \exp(ia_v t)$ gdzie a_v jest jednoznacznie wyznaczone. Z jednoznaczności widać że $a_{sv} = sa_v$ dla $s \in \mathbb{R}$. Biorąc $v_1, v_2 \in V$ i używając wynik dla $\mathbb{R}^2$ mamy $\omega(v_1 t_1 + v_2 t_2) = \exp(i(a_{v_1} t_1 + a_{v_2} t_2))$. Stąd i z jednoznaczności wynika że $a_{v_1+v_2} = a_{v_1} + a_{v_2}$. A więc odwzorowanie zdefiniowane wzorem $l(v) = a_v$ jest liniowe. Jeśli ω jest trywialne (czyli stale równe 1) to l jest stale równe 0 czyli ciągłe. Jeśli ω nie jest trywialne to istnieje v takie że $\omega(v) \neq 1$. Z ciągłości ω istnieje zbiór otwarty U taki że $\omega(u) \neq 1$ dla $u \in U$. A więc $l(u) \neq 0$ dla $u \in U$, czyli jądro l nie jest gęste w V. Oznacza to że l jest odwzorowaniem ciągłym. Innymi słowy, pokazaliśmy lemat:

Lemat 1.4 *Jeśli ω jest ciągłym homomorfizmem przestrzeni wektorowo-toplogicznej V w liczby zespolone o module 1, to istnieje ciągłe odwzorowanie liniowe l z V w $\mathbb{R}$ takie że $\omega(v) = \exp(il(v))$.*

Ale na G_3 nie ma niezerowych ciągłych odwzorowań liniowych w $\mathbb{R}$. Mianowicie, gdyby l było takim odwzorowaniem to przeciwobraz $(-1, 1)$ przez l byłby wypukłym otoczeniem zera różnym od całego G_3. Jednakże w G_3 powłoka wypukła otocznia zera to całe G_3. Dokładniej, otocznie zera zawiera zbiór $U_{0,\varepsilon,E}$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ i E o mierze skończonej. Niech $g \in G_3$ będzie dowolne. Dzielimy E na rozłączne części E_j o mierze mniejszej niż ε: $E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, $\mu(E_j) < \varepsilon$. Niech g_j będzie równe ng na E_j, g/n poza E i 0 na $E - E_j$. Wtedy

$$\mu(\{t \in E : |g_j - 0| > \varepsilon\}) \leq \mu(E_j) < \varepsilon$$

czyli $g_j \in U_{0,\varepsilon,E}$. Ale

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} g_j = g$$

czyli g należy do powłoki wypukłej $U_{0,\varepsilon,E}$. Jako że g było dowolne oznacza to że powłoka wypukła $U_{0,\varepsilon,E}$ to całe G_3. A więc faktycznie w G_3 powłoka wypukła dowolnego otoczenia zera to całe G_3.