Algebry operatorów

Definicja 0.1 *Algebrę A nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ nazywamy algebrą unormowaną jeśli jest ona wyposażona w normę $\|\cdot\|$ taką że z tą normą jest przestrzenią unormowaną i dla dowolnych $x, y \in A$ mamy*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Algebrę unormowaną która jest zupełna w normie nazywamy algebrą Banacha.

Uwaga: Zwykle będziemy rozważać algebry Banacha (czy unormowane) nad liczbami zespolonymi i milcząco zakładać zespolone skalary. W przypadku gdy potrzebne nam będą algebry rzeczywiste napiszemy to jawnie.
Niech G będzie grupą. W algebrze $\mathbb{C}[G]$ wprowadzamy normę wzorem

$$\|\sum a_g \delta_g\| = \sum |a_g|.$$

Wtedy

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$$

czyli z tą normą $\mathbb{C}[G]$ jest algebrą unormowaną (jeśli G jest nieskończona to jest to algebra niezupełna).

Definicja 0.2 *Inwolucją w algebrze A nad $\mathbb{C}$ nazywamy antyliniowy antyautomorfizm o okresie 2, tzn. takie odwzorowanie * że*

$$(xy)^* = y^* x^*,$$

$$(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*,$$

$$(x^*)^* = x.$$

Mówimy wtedy że A jest algebrą z inwolucją, lub krócej że A jest *-algebrą. Jeśli algebra jest unormowana to zwykle będziemy zakładać że $\|a\| = \|a^*\|$.

Na $\mathbb{C}[G]$ wprowadzamy inwolucję wzorem

$$(\sum a_g \delta_g)^* = \sum \bar{a}_g \delta_{g^{-1}}$$

Łatwo sprawdzić że jest to inwolucja i że $\|f^*\| = \|f\|$.

Definicja 0.3 *Reprezentacją algebry A nazywamy lewy A-moduł M. Jeśli A jest *-algebrą, przestrzeń M to przestrzeń Hilberta, A działa przez operatory ograniczone i zachodzi wzór*

$$\rho(a^*) = \rho(a)^*$$

gdzie $\rho(a)v = av$ jest operatorem mnożenia przez a to mówimy że reprezentacja jest *-reprezentacją.

Definicja 0.4 *Mówimy że reprezentacja ρ grupy G jest unitarna jeśli przestrzeń V na której działa jest przestrzenią Hilberta i dla każdego $g \in G$ operator $\rho(g)$ jest operatorem unitarnym.*

Lemat 0.5 *Istnieje 1-1 odpowiedniość między unitarnymi reprezentacjami G i *-reprezentacjami $\mathbb{C}[G]$.*

Dowód: Wiemy że reprezentacje G są w 1-1 odpowiedniości z $\mathbb{C}[G]$-modułami. Jeśli reprezentacja jest unitarna to wzór

$$\rho(\sum a_g \delta_g) = \sum a_g \rho(g)$$

pokazuje że otrzymamy operatory ograniczone. Ponadto

$$\rho(\sum a_g \delta_g)^* = \sum \bar{a}_g \rho(\delta_g)^* = \sum \bar{a}_g \rho(\delta_{g^{-1}})$$

czyli dla $f = \sum a_g \delta_g$ mamy $\rho(f)^* = \rho(f^*)$. A więc z reprezentacji unitarnej G otrzymamy *-reprezentację $\mathbb{C}[G]$. W drugą stronę, jeśli mamy *-reprezentację $\mathbb{C}[G]$ to

$$\rho(\delta_g)^{-1} = \rho(\delta_{g^{-1}}) = \rho(\delta_g^*) = \rho(\delta_g)^*$$

czyli reprezentacja G działa przez operatory unitarne. $\square$

Definicja 0.6 *Mówimy że *-reprezentacja *-algebry A na przestrzeni Hilberta H jest nieprzywidlna jeśli jedyne domknięte podprzestrzenie H niezmiennicze na działanie A to H i przestrzeń zerowa. Mówimy że reprezentacja unitarna grupy G jest nieprzywiedlna jeśli odpowiadają jest reprezentacja $\mathbb{C}[G]$ jest nieprzywiedlna.*

Lemat 0.7 *Niech będzie dana *-reprezentacja *-algebry A na przestrzeni Hilberta H. Jeśli W jest podprzestrzenią niezmienniczą na działanie A to dopełnienie ortogonalne W też jest niezmiennicze na działanie A. W szczególności *-reprezentacja jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy nie daje się rozłożyć na sumę prostą.*

Dowód: Niech X będzie dopełnieniem ortogonalnym W. Dla $a \in A$, $x \in X$ i $w \in W$ mamy

$$\langle ax, w \rangle = \langle x, a^* w \rangle = 0$$

bo $a^* w \in W$. Jako że zachodzi to dla dowolnego $w \in W$ to ax jest ortogonalny do W czyli $ax \in X$. Jako że $a \in A$ jest dowolny oznacza to że X jest niezmiennicze na działanie A. $\square$

Lemat 0.8 *(Lemat Schura, wersja unitarna) *-reprezentacja *-algebry A na przestrzeni Hilberta H jest nieprzywidlna jeśli każdy operator ograniczony na H komutujący z działaniem A jest wielokrotnością identyczności.*

Dowód Niech b będzie operatorem komutującym z A, czyli dla każdego $a \in A$ zachodzi $ab = ba$. Wtedy $b^*a^* = a^*b^*$ czyli b^* komutuje z a^*. Dla $a = c^*$ gdzie c jest dowolnym elemente A oznacza to że b^* komutuje z c. Czyli b^* komutuje z A. Wtedy również $d = b^*b$ komutuje z A. Ale d jest operatorem samosprzężonym i wynik wynika z twierdzenia spektralnego. Dokładniej, jeśli d nie jest wielokrotnością identyczności to istnieje nietrywialna domknięta podprzestrzeń niezmiennicza dla d i dowolnych operatorów komutujących z d, czyli istniałaby nietrywialna podprzestrzeń niezmiennicza dla A, co jest nimożliwe bo reprezentacja jest nieprzywidlna. A więc d jest dodatnią wielokrotnością identyczności. Podobnie bb^* jest dodatnią wielokrotnością identyczności. Oznacza to że b jest dodatnią wielokrotnością operatora unitarnego. Teraz można zastosować twierdzenie spektralne do b skąd wynika że b faktycznie jest wielokrotnością identyczności. $\square$

1 Dodatek o twierdzeniu spektralnym

Definicja 1.1 *Niech Ω będzie przestrznią mierzalną, tzn. jest dana σ-algebra M podzbiorów Ω i niech H będzie przestrzanią Hilberta. Powiemy że E jest miarą spektralną na Ω o wartościach w $L(H)$ jeśli E odwzorowuje M w $L(H)$ i spełnione są następujące warunki*

- *$\forall A \in M$ wartość $E(A)$ to projektor ortogonalny*
- *dla rozłącznych A_1 i A_2 mamy $E(A_1)E(A_2) = 0$*
- *$E(\Omega) = I$ (identyczność na H)*
- *E jest przeliczalnie addytywna gdy w $L(H)$ używamy mocną topologię operatorową*

Uwaga: jeśli E jest miarą spektralną na Ω zaś $v, w \in H$ to odwzorowanie $\mu_{v,w}$ z M w $\mathbb{C}$ zdefiniowane wzorem

$$\mu_{v,w}(A) = \langle E(A)v, w \rangle$$

jest miarą skończoną na A.

Lemat 1.2 *Jesli H jest przestrzenią Hilberta, E jest miarą spektralną na Ω o wartościach $L(H)$ zaś f jest M-mierzalną funkcją ograniczoną na Ω to istnieje dokładnie jeden operator T_f spełniający dla każdego $v, w \in H$*

$$\langle T_f v, w \rangle = \int f(\omega) d\mu_{v,w}(\omega).$$

$\|T_f\| \leq \|f\|_{L^\infty}$. Ponadto, jeśli S jest opertorem komutującym z E, tzn. dla każdego $A \in M$ mamy $SE(A) = E(A)S$ to S komutuje z T_f (czyli $T_f S = ST_f$).

Dowód: Z własności iloczynu skalanego operator T_f o ile istnieje to jest jednoznacznie wyznaczony przez podaną równość.
Aby pokazać istnienie i pozostałe własności rozważmy najpierw f przyjmujące tylko skończenie wiele wartości $a_1, \ldots, a_n$. Niech $A_i = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = a_i\}$. Wtedy

$$T_f = \sum_{i=1}^{n} a_i E(A_i)$$

spełnia podane warunki. Mianowicie, jako że A_i są rozłączne to obraze $E(A_i)$ są ortogonalne i mamy

$$\|T_f\| = \max_i \|a_i E(A_i)\| \leq \max_i |a_i| = \|f\|_{L^\infty}.$$

Rozpisując definicje dla $v, w \in H$ mamy

$$\langle T_f v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i E(A_i)v, v\rangle = \int f(\omega) d\mu_{v,w}(\omega)$$

czyli zachodzi równość definicyjna. Jeśli S komutuje z E to T_f jako kombinacja liniowa $E(A_i)$ też komutuje z S co kończy dowód dla f przyjmujących skończenie wiele wartości.
Jeśli f jest dowolną mierzalną funkcją ograniczoną, to istnieje ciąg f_i funkcji przyjmujących tylko skończenie wiele wartości takich że $\|f_i\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$ i

$$\|f - f_i\|_{L^\infty} \leq 2^{-i}$$

Wtedy $\|f_j - f_i\|_{L^\infty} \leq 2^{-i} + 2^{-j}$ czyli również

$$\|T_{f_j} - T_{f_i}\| \leq 2^{-i} + 2^{-j}.$$

A więc T_{f_i} tworzą ciąg Cauchy'ego w normie, więc są normowo zbieżne do pewnego operatora U. Jako że f_j zbiegają w L^∞ do f to w równości definicyjnej mamy

$$\langle Uv, w\rangle = \lim \langle T_{f_i} v, w\rangle = \lim \int f_i(\omega) d\mu_{v,w}(\omega) = \int f(\omega) d\mu_{v,w}(\omega)$$

więc U spełnia warunek definicyjny dla T_f, czyli można wziąść $T_f = U$. Jako że zbieżność jest w normie to

$$\|T_f\| \leq \sup_i \|T_{f_i}\| \leq \sup_i \|f_i\| \leq \|f\|$$

czyli zachodzie nierówność dla normy. Jeśli S komutuje z E to pokazaliśmy że T_{f_i} komutuje z S, w więc T_f jako granica w normie T_{f_i} też komutuje z S. $\square$

Dla opertora którego istnienie pokazaliśmy w Lemacie 1.2 będziemy stosować oznacznie

$$T_f = \int f(\omega) dE(\omega)$$

Lemat 1.3 *(twierdzenie spektralne 1) Niech R będzie przemienną *-algebrą operatorów na przestrzeni Hilberta H. Wtedy istnieje przestrzeń mierzalna Ω i miara spektralna E na Ω o wartościach w $L(H)$ taka że dla każdego $B \in R$ istnieje ograniczona funkcja mierzalna f_B na Ω taka że*

$$B = \int f_B(\omega) dE(\omega).$$

E komutuje z każdym operatorem S komutującym z R. Ponadto f_B można wybrać tak by $\|f_B\|_{L^\infty(\Omega)} = \|B\|$.

Lemat 1.4 *(twierdzenie spektralne 2) Niech R będzie przemienną *-algebrą operatorów na przestrzeni Hilberta H. Wtedy istnieje przestrzeń mierzalna Ω, miary μ na Ω, homomorfizm h z R w podalgebrę $L^\infty(\Omega)$, izomorfizm ι między H i $L^2(\Omega)$, takie że każdego $v \in H$*

$$\iota(Bv) = h(B)\iota(v),$$

i $\|h(B)\| = \|B\|$. Ponadto jeśli m jest funkcją borelowsko mierzalną zaś S jest operatorem komutującym z S to również $m(B)$ komutje z S gdzie $m(B)$ jest zdefiniowane wzorem

$$m(B)v = \iota^{-1}(m \circ h(B))\iota(v).$$

Aby pokazać Lematy 1.3 i 1.4 potrzebujemy najpierw pomocnicze lematy.

Lemat 1.5 *Jeśli T jestr ograniczonym operatorem samosprzężonym na przestrzeni Hilberta H, $I = [-\|T\|, \|T\|]$, C zaś p jest wielomianem od zmiennej t, to*

$$\|p(T)\| \le \sup_{t \in I} |p(t)|$$

Komentarz: Lemat 1.5 jest łatwym wnioskiem z lematów 1.3 i 1.2 lub z lematu 1.4. Ale chcemy go użyć w dowodzie 1.3 i 1.4, toteż potrzebujemy niezależny dowód.
Dowód. Niech $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ i niech $v \in H$. Wtedy

$$p(T)v = \sum_{i=0}^n a_i T^i v.$$

Niech V będzie podprzestrzenią w H rozpinaną przez $T^i v$ dla $i = 1, \dots, n$ i niech P będzie projektorem ortogonalnym na V. Niech $S = PTP$. Zauważmy że dla $i < n$ mamy $T^i v \in V$ i $T^{i+1} v \in V$, a więc

$$ST^i v = PTPT^i v = PTT^i v = PT^{i+1} v = T^{i+1} v.$$

czyli indukcyjnie ze względu na i mamy $S^i v = T^i v$ dla $i \le n$. A więc $p(S)v = p(T)v$ i $\|p(S)v\| = \|p(T)v\|$. S jest operatorem samosprzężonym i zachowuje skończnie wymiarową podprzestrzeń V, a więc do S na V można użyć skończenie wymiarowe twierdzenie spektralne:

$$Sv = \sum_j \lambda_j e_j \langle v, e_j \rangle$$

gdzie λ_j są wartościami własnymi S zaś e_j są wektorami własnymi. Mamy też

$$p(S)v = \sum_j p(\lambda_j) e_j \langle v, e_j \rangle$$

czyli

$$\|p(S)v\| = \|v\| \max_j |p(\lambda_j)|.$$

Lecz λ_j są rzeczywiste i $|\lambda_j| \leq \|S\| \leq \|T\|$, czyli

$$\|p(S)v\| \leq \|v\| \sup_{t \in I} |p(t)|$$

czyli

$$\|p(T)v\| \leq \|v\| \sup_{t \in I} |p(t)|.$$

Jako że v był dowolny daje to wynik. □

Lemat 1.6 *Jeśli T jest ograniczonym operatorem samosprzężonym na przestrzeni Hilberta H zaś v wektorem cyklicznym dla T, tzn. wektory $T^i v$, $i = 0, 1, \ldots$ rozpinają podprzestrzeń gęstą w H to istnieje miara μ na $[-\|T\|, \|T\|]$ i izomorfizm ι z H w $L^2(\mu)$ takie że dla każdego $w \in H$*

$$\iota(Tw) = t\iota(w)$$

gdzie t jest współrzędną na prostej.

Dowód: Niech niech $I = [-\|T\|, \|T\|]$ i neich $\phi(p)$ bedzie funkcjonałem liniowym na przestrzeni wielomianów zadanym wzorem

$$\phi(p) = \langle p(T)v, v \rangle$$

Na mocy lematu 1.5 ϕ jest ciągły w normie $C(I)$, więc rozszerza się do funkcjonału ciągłego na $C(I)$ który też będziemy pisać jako $\phi(f)$. Jeśli $p = q^2$ gdzie q jest wielomianem rzeczywistym to

$$\phi(p) = \langle q^2(T)v, v \rangle = \langle q(T)v, q(T)v \rangle \geq 0.$$

Jeśli $f \in C(I)$ jest rzeczywista i nieujemna, to istnieje rzeczywista h taka że $f = h^2$. Jeśli q_i jest ciągiem wielomianów rzeczywistych zbiegającym jednostajnie do h to wtedy q_i^2 zbiega jednostajnie do f i mamy

$$\phi(f) = \lim \phi(q_i^2) \geq 0$$

bo $\phi(q_i^2) \geq 0$. A więc ϕ jest nieujemny na funkcjach nieujemnych, czyli istnieje miara μ taka że

$$\phi(f) = \int f(t) d\mu(t).$$

Odwzorowanie ι najpierw definiuję dla wektorów postaci $p(T)v$ wzorem

$$\iota(p(T)v) = p(t).$$

Mamy

$$\|p(T)v\|^2 = \langle \bar{p}(T)p(T)v, v\rangle = \phi(\bar{p}(t)p(t)) = \int \bar{p}(t)p(t)d\mu(t) = \|p(t)\|_{L^2(\mu)}$$

czyli ι jest izometrią na podprzestrzeni rozpinanej przez $T^i v$, $i = 0, 1, \ldots$. W szczególności $p(T)v = 0$ implikuje $\iota(p(T)v) = 0$ czyli ι jest dobrze zdefiniowana. Teraz możemy rozszerzyć ι z podprzestrzeni gęstej na całe H. Obraz ι zawiera wielomiany które są gęste w $L^2(\mu)$, a więc ι jest izomorfizmem H z $L^2(\mu)$. Jako że ι jest izometrią to mamy

$$\langle Tp(T)v, q(T)v\rangle_H = \langle tp(t), q(t)\rangle_{L^2(\mu)}$$

Jako że wielomiany $q(t)$ dają zbiór gęsty w $L^2(\mu)$ oznacza to że $\iota(Tp(T)v) = tp(t) = t\iota(p(T)v)$, czyli mamy równość

$$\iota(Tw) = t\iota(w)$$

dla w postaci $p(T)v$. Ale wektory postaci $p(T)v$ dają zbiór gęsty w H, czyli równość zachodzi dla dowolnego $w \in H$. $\square$

Zauważmy że lemat 1.6 jest szczególnym przypadkiem lematu 1.4 odpowiadającym *-algebrze R generowanej przez pojedynczy operator samosprzężony i mającej wektor cykliczny. W dowodzie kluczową role odgrywał lemat 1.5. Ten lemat można uogólnić na dowolne rodziny ogranczonym operatorów samosprzężonych.

Lemat 1.7 *Jeśli T_α są ograniczonymi operatorami samosprzeżonymi na przestrzemi Hiblerta H, T_α tworzą rodzinę przemienną, $I_\alpha = [-\|T_\alpha\|, \|T_\alpha\|]$, $C = \prod I_\alpha$, p jest wielomianem of t_α, to*

$$\|p(T)\| \leq \sup_{t \in C} |p(t)|$$

Lemat ten udowodnimy nieco później. Zauważmy teraz że lemat 1.7 implikuje odpowiednią wersję lematu 1.6

Lemat 1.8 *Jeśli T_α są ograniczonymi operatorami samosprzężonymi na przestrzeni Hilberta H zaś v wektorem cyklicznym dla T_α, tzn. wektory $T^\alpha v$, gdzie α są wielowskaźnikami rozpinają podprzestrzeń gęstą w H, I_α i C są jak w lemacie*

1.7, to istnieje miara μ na C i izomorfizm ι z H w $L^2(\mu)$ takie że dla każdego $w \in H$ i każdego α

$$\iota(T_\alpha w) = t_\alpha \iota(w)$$

gdzie t_α odpowiednią jest współrzędną.

Dowód tego lematu różni się tylko użyciem lematu 1.7 i oznaczniami od dowodu lematu 1.6, więc pominiemy szczegóły.

Lemat 1.9 *Niech R będzie przemienną *-algebrą operatorów na przestrzeni Hilberta H. Wtedy H jest sumą podprzestrzeni cyklicznych, tzn. istnieją wektory v_β i podprzestrzenie H_β takie że*

$$H = \oplus_\beta H_\beta$$

i Rv_β jest gęste w H_β.

Dowód. Na mocy lematu Kurotowskiego-Zorna istnieje maksymalna rodzina wektorów v_β i podprzestrzeni H_β takich że H_β są wzajemnie ortogonalne i Rv_β jest gęste w H_β. Niech

$$W = \oplus_\beta H_\beta$$

Twierdzimy że $W = H$. W przeciwnym przypadku niech V będzie dopełnieniem ortogogonalnym do W. Oczywiście każde H_β a więc i W są podprzestrzniami niezmienniczymi dla R. Wtedy też V jest podprzestrzenią niezmienniczą. Niech v będzie dowolnym niezerowym wektorem w V. Wtedy domknięcie U przestrzeni Rv jest domkniętą podprzestrznią ortogonalną do wszystkich H_β. A więc do v_β można by dodać v zaś do H_β można by dodać U przecząc maksymalności. □

Powyższe lematy pozwalają łatwo pokazać lemat 1.4. Mianowicie, dla R można wybrać samosprzężony układ generatorów T_α. Przestrzeń H przedstawiamy jako sumę prostą H_β. Do T_α i H_β stosuje się lemat 1.8, czyli istnieje izomorfizm ι_β z H_β na $L^2(\mu_\beta)$. Jeśli $B \in R$ jest postaci $B = p(T_\alpha)$ gdzie p jest wielomianem to $h_\beta(B)$ definiujemy jako $p(t)$. Widać że przy tym określeniu dla $v \in H_\beta$ mamy

$$\iota_\beta(Bv) = h_\beta(B)\iota_\beta(v).$$

Oznacza to że norma operatora mnożenia przez $h_\beta(B)$ jest równa normie B, czyli $\|h_\beta(B)\|_{L^\infty(\mu_\beta)} = \|B\|$. B takiej postaci tworzą zbiór gęsty w R zaś pokazana równość norm oznacza że h_β rozszarza się na całe R.
Jako Ω weźmiemy sumę rozłączną C indeksowaną przez β, na części z indeksem β miarę μ definujemy jako μ_β. To oznacza że $L^2(\mu)$ jest sumą prostą $L^2(\mu_\beta)$. A więc możemy zdefiniować h i ι po składowych. Pozostaje jeszcze pokazać część dotyczącą m. Jeśli m jest wielomianem to $m(B) \in R$ i oczywiście $m(B)$ komutuje z operatorami komutującymi z R. Jeśli m_i jest ciągiem funkcji zbieżnym punktowo i wspólnie ograniczonym, to $m_i(B)$ zbiega w mocnej topologii operatorowej do $m(B)$. A więc jeśli $m_i(B)$ komutują z S to również $m(B)$ komutuje

z m. A więc klasa funkcji m takich że $m(B)$ komutuje z S jest zamknięta na ograniczone granice punktowe a więc zawiera funkcje borelowsko mierzalne. Posumowując, pokazaliśmy że przy pomocy lematu 1.7 możemy pokazać lemat 1.4. Teraz pokażemy lemat 1.7. Zauważmy że wielomian faktycznie zależy tylko od skończenie wielu zmiennych, więc wystarcza pokazać go dla skończonej rodziny $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Zrobimy to przez indukcję ze względu na n. Przypadek $n = 1$ to lemat 1.5. Indukcyjnie zakładamy że lemat jest prawdziwy dla n i pokażemy że stąd wynika lemat dla $n+1$. Do algebry generowanej przez T_{n+1} można zastosować lemat 1.4 (bo dowód lematu 1.4 w takim przypadku używał tylko lemat 1.5). Niech $1_{[a,b)}$ będzie funkcją wskaźnikową przedziału $[a, b)$, tzn. $1_{[a,b)}(t) = 1$ dla $t \in [a, b)$ i $1_{[a,b)}(t) = 0$ poza tym. $1_{[a,b)}(T_{n+1})$ jest projektorem który na mocy 1.4 komutuje z $T_1, T_2, \ldots, T_n$. W szczególności jego obraz $H_{a,b}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Z założenia indukcyjnego do $q_a(t_1, \ldots, t_n) = p(t_1, \ldots, t_n, a)$ stosuje się 1.7, więc dla $a \in I_{n+1}$

$$\|q_a(T_1, \ldots, T_n)\|_{H_{a,b}} \leq \sup_{t \in C_n} |p(t_1, \ldots, t_n, a)| \leq \sup_{t \in C_{n+1}} |p(t)|$$

gdzie C_n to produkt $I_1, \ldots, I_n$ zaś C_{n+1} to produkt $I_1, \ldots, I_{n+1}$. Różnica $p - q_a$ jest równa 0 dla $t_{n+1} = a$, a więc

$$p - q_a = (t_{n+1} - a)r$$

gdzie r jest wielomianem od pierwszych t współrzędnych którego wpólczynnki można otrzymać przy pomocy rozwinięcia Taylora względem t_{n+1}. W szczególności istnieje stała D_1 zależna od p i przedziału I_{n+1}, ale niezależna od a i b taka że współczynniki $p - q_a$ są oszacowane przez D_1. Jako że wielomian zawiera tylko skonczenie wiele T^α oznacza to że istnieje stała D_2 taka że

$$\|p(T) - q_a(T)\|_{H_{a,b}} \leq D_2(b - a)$$

czyli

$$\|p(T)\|_{H_{a,b}} \leq D_2(b - a) + \sup_{t \in C_{n+1}} |p(t)|$$

Teraz bierzemy $a_0 = -\|T_{n+1}\|$, $a_i = a_0 + i\varepsilon$ gdzie $\varepsilon > 0$ jest dowolne ustalnie i $b_i = a_{i+1}$. Mamy

$$H = \oplus_{i=0}^{m} H_{a_i,b_i}$$

więc

$$\|p(T)\|_H = \max \|p(T)\|_{H_{a_i,b_i}} \leq \max D_2(b_i - a_i) + \sup_{t \in C_{n+1}} |p(t)|$$

$$\leq D_2\varepsilon + \sup_{t \in C_{n+1}} |p(t)|$$

Jako że $\varepsilon > 0$ był dowolny wynika stąd że

$$\|p(T)\| \leq \sup_{t \in C_{n+1}} |p(t)|$$

co kończy dowód lematu 1.7.

Dowód lematu 1.3: Jest to wniosek z 1.4. Jako że ι jest izomorfizmem to bez utraty ogólności możemy zakładać że $H = L^2(\Omega)$ zaś R składa się z operatorów mnożenia przez funkcje. W przestrzeni Ω zmienimy σ-algebrę zbiorów. Nowa σ-algebra M jest generowana przez przeciwobrazy zbiorów borelowskich na prostej przez h gdzie h przebiega R. Jeśli U jest podzbiorem Borelowskim prostej, $A = h^{-1}(U)$ to $E(A)$ definujemy jako operator mnożenia przez 1_A. Widać że 1_A przyjmuje wartości w zbiorze $\{0,1\}$, a więc $E(A)$ jest projektorem ortogonalnym. Operatory mnożenia przez funkcje komutują więc wartości E komutują. Przeciwobraz całej prostej to Ω a odpowiedni operator to identyczność, czyli jest spełniowny trzeci warunek z definicji miary spektralnej. Jeśli A_i jest ciągiem mierzalnych zbiorów rozłącznych takich że $\bigcup_i A_i = A$, zaś $w \in L^2$ to

$$\sum_i 1_{A_i} w = 1_A w$$

w L^2, czyli E spełnia czwarty warunek. Dla ograniczonego h mierzalnego względem M

$$\int h dE(\omega).$$

jest operatorem mnożania przez h. Mianowicie, jeśli h przyjmuje tylko skończenie wiele wartości to widać że operator mnożenia przez h jest sumą $a_i E(A_i)$ gdzie A_i to przeciwobraz a_i przez h. Ogolne ograniczone h jest jednostają granicą h przyjmujących skończenie wiele wartości. Teraz niech B będzie operatorem mnożenia przez h. Jak uzasadnialiśmy mamy

$$B = \int h dE(\omega).$$

czyli przyjmujące $h(B) = h$ dostaniemy wynik o reprezentacji B jako całki z moary spektralnej. Na mocy 1.4 wartości E komutują z operatormi S komutującymi z R. Podobnie, na mocy 1.4 $\|B\| = \|h(B)\|$. □

Lemat 1.10 *Jeśli T jest operatorem samosprzężonym na przestrzeni Hilberta H to albo T jest identycznością albo miara spektralna dla algebry generowanej przez T ma w obrazie nietrywialny projektor (tzn, istnieje A takie że $E(A) \notin \{0, I\}$).*

Dowód: Mamy

$$T = \int f_T(\omega) dE(\omega)$$

Gdyby dla każdego A projektor $E(A)$ był trywialny, to byłby on wielokrotnością identyczności i również T jako granica sum $E(A)$ był by wielokrotnością identyczności. □