1 Przykłady, grupy abelowe

1.1 Reprezentacje nieprzywiedlne

1. $\mathbb{R}$ z dodawaniem jest grupą abelową, więc nieprzywiedlne reprezentacja unitarne są jednowymiarowe, czyli zadane przez homomorfizm w liczby zespolone o module 1 (tzn. charakter reprezentacji). Wcześniej zauważyliśmy że homomorfizm z $\mathbb{R}$ w liczby zespolone on module jeden jest postaci $\omega_a(t) = \exp(iat)$ gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest dowolne. To daje pełny opis nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych $\mathbb{R}$.
2. Grupa $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (czyli okrąg). Jest to grupa abelowa więc nieprzywiedlne reprezentacja unitarne są zadane przez homomorfizm w liczby zespolone o module 1. Dla $\mathbb{R}$ taki homomorfizm jest postaci $\omega_a(t) = \exp(iat)$. T jest ilorazem $\mathbb{R}$, więc reprezentacje T odpowiadają reprezentacjom $\mathbb{R}$ które przeprowadzają $2\pi\mathbb{Z}$ na identyczność. A więc reprezentacje T odpowiadają $\omega_k(t) = \exp(ikt)$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Wyżej pomnożyliśmy $\mathbb{Z}$ przez 2π by uzyskać prosty wzór na $\omega_k(t)$, w przeciwnym razie trzeba by użyć $\exp(i2\pi kt)$.
3. Grupa $\mathbb{R}^n$ z dodawaniem. Reprezentacje są zadane przez charaktery postaci $\omega_a(t) = \exp(i\langle t, a\rangle)$ gdzie $a \in \mathbb{R}^n$ zaś $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$.
4. Grupa T^n. Tu charaktery są postaci $\omega_\alpha(t) = \exp(i\langle t, \alpha\rangle)$ z $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.
5. Grupa $\mathbb{Z}$ z dowawaniem. Tu charakter jest wyznaczony przez wartość dla $k = 1$. Tą wartość można zapisać jako $\exp(it)$ gdzie $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (tzn. dostaniemy tą samą wartość gdy dodamy $2\pi l$ z $l \in \mathbb{Z}$ do t, przy tym klasa równoważności t jest wynaczona jednoznacznie). Dla ogólnego k mamy $\omega_t(k) = \exp(itk)$.
Powyższy przykład ilustruje ogólne znawisko: charaktery lokalnie zwartej grupy abelowej G z mnożeniem punktowych jako działaniem i z topologią zbieżności jednostajnej na zbiorach zwarych stanowią grupę lokalnie zwartą nazywaną grupą dualną i niekedy oznaczaną przez G'. Ponadto charaktery G' są w 1-1 odpowiedniości z elementi G. Dokładniej dla $a \in G$ odworowanie $\omega \mapsto \omega(a)$ daje charakter G'. Można pokazać że wszystkie charaktery G' są tej postaci że oryginalna topologia G jest identczna z topologią G''.
6. Grupa $\mathbb{Z}^n$. Tu charaktery jest wyznaczony przez element $t \in T^n$ i mamy wzór $\omega_t(\alpha) = \exp(i\langle \alpha, t\rangle)$.

1.2 Struktura reprezentacji

Dla $f \in L^1(G)$ możemy zdefiniować obraz przez reprezentację unitarną ρ wzorem

$$\rho(f) = \int_{g \in G} f(g)\rho(g)dg.$$

Wymaga to całkowania funkcji wektrowych. Jeśli przestrzeń H na której działa ρ jest ośrodkowa to przestrzeń operatorów ograniczonych $L(H)$ na H z topologią mocnej zbieżności jest ośrodkowa. Dodatkowo kula jednostkowa w $L(H)$ jest metryzowalana w sposób zupełny. Pozwala to bez problemu przenieść teorią mierzalości na funkcje o wartościach w $L(H)$. Można też przenieść teorię całkowania Lebesque'a na funkcje o wartościach W $L(H)$. W szczególności jeśli f

jest mierzalna to $\|f\|$ jest mierzalna. Jeśli $\|f\|$ jest całkowalna i f jest mierzalna to f jest całkowalna.
Dla grupy T (czy też T^n) możemy teraz prawie literalnie przenieść konstrukcją rozkładu kanonicznego reprezentacji. Mianowicie, niech $e_k(t) = \frac{1}{2\pi}\exp(-itk)$. Łatwo sprawdzić że e_k jest idempotentem, tzn. $e_k * e_k = e_k$ gdzie $*$ oznacza splot. $\rho(e_k)$ daje operator rzutowania na poprzestrzeń H rozpinaną przez podreprezentacje z charakterem ω_k. Oznaczmy $H_k = \rho(e_k)H$. Mamy wtedy

$$H = \oplus_k H_k$$

tzn. reprezentacja ρ jest równoważna sumie prostej reprezentacji H_k. Ponadto dowolna baza ortogonalna w H_k daje rozkład reprezentacji na H_k na sumę reprezentacji nieprzywiedlych.
W przypadku gdy ρ jest reprezentacją regularną to H_k są jednowymiarowe. Otrzymany rozkład jest faktycznie rozkładem w (wykładniczy) szereg Fouriera. Dla reprezentacji regularnej $\mathbb{R}$ sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana. Dla funkcji z L^1 wprowadzamy transformację Fouriera wzorem

$$(\hat{f})(a) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-iat)dt.$$

Można sprawić że $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ i że $\hat{f}$ jest funkcją ciągłą znikającą w nieskończoności. Ponadto dla $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ mamy $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ i $\|\hat{f}\|^2_{L^2} = 2\pi\|f\|^2_{L^2}$. Oznacza to że na obrazie $L^1 \cap L^2$ przez transformację Fouriera $\hat{f}$ działa podobnie do przykładów z poprzedniego wykładu. To działanie rozszerza się na całe L^2. Jako że obraz L^1 przez transformację Fouriera jest zamknięty na mnożenie punktowe i sprzężenie zespolne, to jest gęsty w przestrzeni funkcji ciągłych znikających w nieskończoności. Teraz stosuje się lemat o postaci podprzestrzeni niezmienniczych. Używając postać podprzestrzeni niezmienniczych można pokazać że obraz $L^1 \cap L^2$ przez transformację Fouriera jest gęsty w L^2. A więc transformacja Fouriera zadaje równoważność reprezentacji regularnej z reprezentacją gdzie obaz f działa jako mnożenie przez funkcję. W szczególności element $t \in \mathbb{R}$ działa jako mnożenie przez $\exp(-ita)$. A więc nie ma mninimalnych podprzestrzeni niezmienniczych i reprezentacja nie jest sumą prostą. Można sformułować mówiąc że reprezentacja regularna jest całką prostą reprezentacji nieprzywiedlnych względem miary Lebesque'a.
W ramach dowodu twierdzenia spektralnego pokazaliśmy że dowolna reprezentacja jest sumą prostą reprezentacji cyklicznych. Dla reprezentacji cyklicznych mamy podobny wynik jak dla reprezentacji regularnej. Dokładniej instnieje miara μ taka że obraz f przez reprezentacje działa na $L^2(\mu)$ mnożąc przez $\hat{f}$. Miarę μ można wybrać na wiele sposobów. Jeden wyróżniony wybór dostaniemy gdzy zażądamy by wektor cykliczny odpowiadał funkcji stale równej 1. Przy tym warunku miara μ będzie miarą probabilistyczną.
Ogólna reprezentacja $\mathbb{R}$ daje się przedtawić jako całko prosta. Dla reprezantacji na przestrzeniach ośrodkowych całkę prostą można robić jako całkę po $\mathbb{R}$, tyle że na danym punktem możemy mieć przestrzeń wyższego wymiaru (ośrodkową).