1 Funkcjonały dodatnie

Definicja 1.1 *Jeśli A jest *-algebrą, ϕ jest funkcjonałem liniowym na A to mówimy że A jest dodatni jeśli $\phi(x^*x) \geq 0$ dla dowolnego $x \in A$.*

Definicja 1.2 *Mówimy że wektor v jest cykliczny dla reprezentacji ρ algebry z jedynką A jeśli $\rho(A)v$ jest gęste w przestrzeni na której jest zdefiniowane ρ. Reprezentacją cykliczną algebry A nazywamy parę (ρ, v) gdzie ρ jest reprezentacją A zaś v jest wektorem cyklicznym dla ρ.*

Lemat 1.3 *Jeśli (ρ, v) jest *-reprezentacją cykliczną *-algebry A z jedynką to funkcjonał*

$$\phi_{\rho,v}(x) = (\rho(x)v, v)$$

jest dodatni na A. Jeśli ψ jest funkcjonałem dodatnim na A to istnieje co najwyżej jedyna z dokładnością do izomorfizmu *-reprezentacja cykliczna (ρ, v) taka że $\psi = \phi_{\rho,v}$. Jeśli dodatkowo A jest unormowana i ψ jest normowo ciągły to taka reprezentacja istnieje. Podobnie, jeśli dla pewnej reprezentacji cyklicznej (θ, z) i wszystkich $x \in A$ mamy $\psi(x^*x) \leq \phi_{\theta,z}(x^*x)$ to istnieje (ρ, v) takie że $\psi = \phi_{\rho,v}$.

Dowód. Jeśli (ρ, v) jest *-reprezentacją cykliczną to

$$\phi_{\rho,v}(x^*x) = (\rho(x^*x)v, v) = (\rho(x)v, \rho(x)v) = \|\rho(x)v\|^2 \geq 0$$

czyli funkcjonal $\phi_{\rho,v}$ jest dodatni. Niech teraz ψ będzie funkcjonałem dodatnim na A. Najpierw zauważmy że jeśli istnieje reprezentacja cykliczna (ρ, v) taka że $\psi = \phi_{\rho,v}$ to jest ona wyznaczona jednoznacznie. Mianowicie na $\rho(A)v$ mamy

$$(xv, yv) = (y^*xv, v) = \psi(y^*x)$$

czyli na $\rho(A)v$ produkt skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez ψ. W szczególności anihilator $I_{\rho,v} = \{x : \rho(x)v = 0\}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez ψ. Jeśli (ρ_i, v_i) dla $i = 1, 2$ są reprezentacjami takimi że $\psi = \phi_{\rho_i,v_i}$ to $\rho_i(A)v$ jest izomorficzne z $A/I_{\rho_i,v_i}$ czyli $\rho_1(A)v$ jest algebraicznie izomorficzne z $\rho_2(A)v$. Na mocy wcześniejszego rachunku są one izometryczne, czyli dostajemy równoważność reprezentacji.
Aby pokazać istnienie na A wprowadzamy iloczyn skalarny wzorem

$$(x, y) = \psi(y^*x).$$

Jako że ψ jest dodatni to ten iloczyn jest dodatnio określony, czyli wprowadza na A strukturę przestrzeni unitarnej. Dzieląc A przez podprzestrzeń wektorów zerowych i uzupełniając otrzymujemy przestrzeń Hilberta V. Dla $x, y \in A$ mamy

$$\|xy\|_V^2 = (xy, xy)_V = (x^*xy, y) \leq \|x^*xy\|_V \|y\|_V.$$

Indukcyjnie

$$\|xy\|_V^2 \leq \|(x^*x)^{2^k} y\|_V^{1/2^k} \|y\|_V^{2-1/2^k}.$$

Jeśli A jest algebrą unormowaną i ψ jest ciągły to

$$\|x\|_V^2 = \psi(x^*x) \leq \|\psi\| \|x^*x\|_A$$

i

$$\|(x^*x)^{2^k} y\|_V \leq \|\psi\|^{1/2} \|((x^*x)^{2^k} y)^*(x^*x)^{2^k} y\|_A^{1/2}$$

$$\leq \|\psi\|^{1/2} (\|(x^*x)^{2^{k+1}}\|_A \|y^*\|_A \|y\|_A)^{1/2} \leq (\|\psi\| \|y^*\|_A \|y\|_A)^{1/2} \|x^*x\|_A^{2^k}.$$

Teraz biorąc $M = \|\psi\| \|y^*\|_A \|y\|_A$ mamy

$$\|xy\|_V^2 \leq M^{1/2^{k+1}} \|x^*x\|_A \|y\|_V^{2-1/2^k}$$

Biorąc granicę przy k dążącym do nieskończoności mamy

$$\|xy\|_V^2 \leq \|x^*x\|_A \|y\|_V^2$$

czyli mnożenie przez x zadaje operator ograniczony w normie V z normą co najwyżej $\|x^*x\|_A^{1/2}$. Rozszerzając ten operator przez ciągłość na V dostajemy operator $\rho(x)$. Oczywiście ρ jest reprezentacją. Z definicji iloczynu skalarnego na V, dla $x, y, z \in A$ mamy

$$(y, \rho(x^*)z)_V = \psi(z^*xy) = (\rho(x)y, z)_V.$$

Przez ciągłość ta równość zachowuje się dla dowolnych $y, z \in V$, czyli $\rho(x^*) = \rho(x)^*$, czyli ρ jest *-reprezentacją. Niech v będzie obrazem 1 w V. Mamy

$$(\rho(x)v, v) = \psi(1x1) = \psi(x)$$

czyli $\psi = \phi_{\rho,v}$.
Aby pokazać ostatnią część lematu zauważmy że jeśli dla dowolnego $x \in A$ mamy $\psi(x^*x) \leq \phi_{\theta,z}(x^*x)$ to dla $x, y \in A$

$$\|(x^*x)^{2^k} y\|_V^2 = \psi(((x^*x)^{2^k} y)^*(x^*x)^{2^k} y) \leq \phi_{\theta,z}(((x^*x)^{2^k} y)^*(x^*x)^{2^k} y)$$

$$= \|\theta((x^*x)^{2^k} y)z\|^2 \leq \|\theta(x^*x)\|^{2^{k+1}} \|\theta(y)\|^2 \|z\|^2$$

czyli z $M = \|\theta(y)\| \|z\|$ mamy

$$\|xy\|_V^2 \leq M^{1/2^k} \|\theta(x^*x)\| \|y\|^{2-1/2^{k+1}}$$

co znowu daje

$$\|xy\|_V \leq \|\theta(x^*x)\|^{1/2} \|y\|_V$$

i tak jak w przypadku unormowanym mnożenie przez x daje operator ograniczony. Reszta dowodu nie zależy od tego czy A jest unormowana. $\square$

Lemat 1.4 *Jeśli A jest *-algebrą, ϕ, ψ_1, ψ_2 są funkcjonałami dodatnimi na A, $\phi = \psi_1 + \psi_2$, to reprezentacja cykliczna odpowiadająca ϕ jest izomorficzna z podreprezentcją sumy prostej reprezentacji (ρ_i, V_i, ξ_i) odpowiadających ψ_1 i ψ_2. Co więcej, $\eta = (\xi_1, \xi_2) \in V_1 \oplus V_2$ spełnia $\phi(x) = ((\rho_1 \oplus \rho_2)(x)\eta, \eta)$. Reprezentacja cykliczna odpowiadająca ϕ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{R}\phi$ jest promieniem ekstremalnym w stożku funkcjonałów dodatnich na A.*

Dowód: Jeśli ϕ pochodzi z reprezentacji, to na mocy ostatniej częsci Lematu 1.3 również ψ_i pochodzą z reprezentacji. Wzór z η to prosty rachunek:

$$((\rho_1 \oplus \rho_2)(x)\eta, \eta) = (\rho_1(x)\xi_1, \xi_1) + (\rho_2(x)\xi_2, \xi_2)$$

$$= \psi_1(x) + \psi_2(x) = \phi(x).$$

Z jednoznaczności reprezentacji cykliczniej wynika że reprezentacja odpowiadająca ϕ jest izomorficzna z podreprezentacją sumy prostej $\rho_1 \oplus \rho_2$ generowną przez η. Rzuty z V na V_i dają niezerowo operatory splatające reprezentację odpowiadająca ϕ z reprezentajami odpowiadającymi ψ_i. Jeśli reprezentacja odpowiadająca ϕ jest nieprzywiedlna, to te operatory splatające są wielokrotnościami izometrii, więc ψ_i są proporcjonalne do ϕ, czyli $\mathbb{R}\phi$ jest promieniem ekstermalnym w stożku funkcjonałów dodatnich na A. Jeśli reprezentacja (ρ, v) odpowiadająca ϕ jest przywiedlna to jest sumą prostą dwu swoich podreprezentacji. Wtedy ϕ jest sumą funkcjonałów dodatnich ψ_i odpowiadających podreprezentacjom. Gdyby ψ_i były dodatnimi wielokrotnościami ϕ to wtedy rzuty z V na V_i byłyby wielokrotnościami izometrii, skąd by wymikało że oryginalna reprezentacja nie jest cykliczna. A więc ψ_i nie są dodatnimi wielokrotnościami ϕ, czyli $\mathbb{R}\phi$ nie jest promieniem ekstermalnym w stożku funkcjonałów dodatnich na A. $\square$

Powyższe lematy nie uwzględniają topologi G, tzn. rozważane reprezentacje mogą być nieciągłe. Poniżej podamy prosty sposób uwzględnienia topologii G:

Definicja 1.5 *Powiemy że funkcja ϕ na G jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy funkcjonał ψ zadany wzorem*

$$\psi(\sum a_g \delta_g) = \sum a_g \phi(g)$$

jest dodatni na $\mathbb{C}[G]$.

Przyład: $\phi(t) = \max(0, 1 - |x|)$ jest dodatnio określona na $\mathbb{R}$.

Lemat 1.6 *Jeśli ϕ jest funkcją dodatnio określoną na G to dla dowolnego $g \in G$ mamy*

$$|\phi(g)| \leq \phi(e),$$

$$\phi(g^{-1}) = \bar{\phi}(g).$$

Dowód: Zauważmy najpierw że $\phi(e)$ jest rzeczywiste dodatnie, bo dla $f = \delta_e$ mamy $f^*f = \delta_e$ i $\psi(f^*f) = \phi(e)$, a więc faktycznie $\phi(e)$ jest rzeczywiste dodatnie. Niech $f = \delta_e + s\delta_g$. Wtedy $f^* = \delta_e + \bar{s}\delta_{g^{-1}}$ i

$$\begin{aligned} f^*f &= \delta_e + s\bar{s}\delta_g\delta_{g^{-1}} + s\delta_g + \bar{s}\delta_{g^{-1}} \\ &= (1+|s|^2)\delta_e + s\delta_g\bar{s}\delta_{g^{-1}} \end{aligned}$$

czyli

$$\psi(f^*f) = (1+|s|^2)\phi(e) + s\phi(g) + \bar{s}\phi(g^{-1}).$$

Dla dowolnego zespolonego s prawa strona jest rzeczywista, a więc skoro $\phi(e)$ jest rzeczywiste to

$$s\phi(g) + \bar{s}\phi(g^{-1})$$

jest rzeczywiste. Biorąc rzeczywiste s widać że jest to możliwe tylko wtedy gdy

$$\Im(\phi(g)) = -\Im(\phi(g^{-1}))$$

gdzie $\Im$ oznacza część urojoną. Podobnie, biorąc urojone s widać że

$$\Re(\phi(g)) = \Re(\phi(g^{-1}))$$

gdzie $\Re$ oznacza część rzeczywistą. Razem daje to

$$\phi(g) = \bar{\phi}(g^{-1}).$$

Teraz bierzemy z takie że $z\phi(g) = |\phi(g)|$. Podstawiając $s = zt$ do wzoru na $\psi(f^*f)$ i uwzględniając otrzymaną równość mamy

$$\psi(f^*f) = (1+|t|^2)\phi(e) + 2t|\phi(g)|$$

Dla rzeczywistego t część rzeczywista prawa strona jest trójmianem kwadratowym od t, czyli gdy jest dodatnia to wyróżnik trójmianu jest ujemny:

$$0 \geq \Delta = (2|\phi(g)|)^2 - 4\phi(e)^2$$

czyli

$$\phi(e)^2 \geq |\phi(g)|^2.$$

Jako że $\phi(e)$ jest dodatnie daje to wynik. □

Lemat 1.7 *Wzór $\phi(g) = \langle \rho(g)v, v\rangle$ zadaje 1-1 odpowiedniość między zbiorem funkcji dodanio określonych na G i zbiorem cyklicznych reprezentacji unitarnych G. Reprezentacja jest jest słabo rozdzielnie ciągła wtedy i tylko wtedy gdy ϕ jest ciągła.*

Dowód: Zauważny najpierw że na mocy Lematu 1.6 funkcja dodatnio określna jest ograniczona, a więc zadaje funkcjonał normowo ciągły na $\mathbb{C}[G]$. Teraz pierwsza część wynika z Lematu 1.3 i lematu o odpowiedniości między reprezentacjami $\mathbb{C}[G]$ i reprezentacjami G. Pozosteje pokazać część o ciągłości. Lecz ϕ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy dowolne elementy macierzowe $\langle \rho(g)u, w\rangle$ są ciągłe. Mianowicie dla $u = fv$ i $w = hv$ mamy

$$\langle \rho(g)u, w\rangle = \langle \rho(h^*\delta_g f)v, v\rangle$$

co jest kombinacją liniową przesunięć ϕ. Unitarność ρ oznacza że ciągłość $\langle \rho(g)u, w\rangle$ z gęstego zbioru u, w przenosi się na dowolne u, w. Ciągłość $\langle \rho(g)u, w\rangle$ oznacza słabą rozdzielną ciągłość reprezentacji. □

Mówimy że reprezentacja ρ jest ciągła gdy odzorowanie z $G \times H$ w H zadane wzorem $(g, v) \mapsto \rho(g)v$ jest ciągłe. Jako że na operatorach unitarnych topologia słabej zbieżności jest równoważna topologii mocnej zbieżności, to z lematu wynika ciągłość odwzorowania wyżej ze względu na G. Teraz łączna ciągłość wynika z tego że normy $\rho(g)$ są wspólnie ograniczone

$$\begin{aligned}\|\rho(g_1)v_1 - \rho(g_0)v_0\| &\le \|\rho(g_1)v_1 - \rho(g_1)v_0\| + \|\rho(g_1)v_0 - \rho(g_0)v_0\| \\ &\le \|v_1 - v_0\| + \|\rho(g_1)v_0 - \rho(g_0)v_0\|.\end{aligned}$$

Daje to lemat:

Lemat 1.8 *Reprezentacja cykliczna ρ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadająca jest funkcja dodatnio określona jest ciągła.*

Uwaga: Taka postać lematu jest prawdziwa bo rozważamy reprezentacje unitarne. Można by rozważać ogólniejsze reprezentacje i wtedy potrzebne są dodatkowe założnia.
Naszym celem jest teraz rozkład *-reprezentacji grupy lokalnie zwartej G na składniki nieprzywiedlne. Idea jest prosta: chcemy przedstawić dowolny funkcjonał dodatni jako całkę z funkcjonałów ekstremalnych. Jednakże są trudności techniczne. Przy tym jest naturalne że są trudności, bo nie wszystkie grupy mają reprezentacje nieprzywiedlne. Dlatego będziemy pracować z algebrą $L^1(G)$ (która niejako automatycznie implikuje lokalną zwartość G). Dla uproszczenia będziemy zakładać że G jest ośrodkowa i metryzowalna.
Aby łatwo zdefiniować ważne pojęcia potrzebujemy całek funkcji wektorowych. Bez dowodu przyjmiemy fakt niżej:
Fakt. Niech W będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Dla funkcji o wartościach w W istnieje teoria całkowania analogiczna do teori całki Lebesque'a funkcji rzeczywistych. W szczególnośći jeśli f jest mierzalna o wartościach w W (tzn. przeciwobrazy kul są mierzalne) to $\|f\|$ jest mierzalna. Jeśli f jest mierzalna i $\|f\|$ jest całkowalna to istnieje całka z f i dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego u na W funkcja $x \mapsto \langle f(x), u\rangle$ jest mierzalna i

$$\langle \int f(x), u\rangle = \int \langle f(x), u\rangle.$$

Zachodzi twierzenie Lebesque'a o dominowej zbieżności.
Używając ten fakt możemy zdefiniować działanie (splot) w $L^1(G)$ wzorem

$$f * h = \int f(g) L_g h$$

gdzie $(L_g h)(x) = h(g^{-1}x)$. Można pokazać że splot jest łączny. Ponadto w $L^1(G)$ można zdefiniować inwolucję, mianowicie, istnieje funkcja m taka że dla dowolnego $f \in L^1(G)$ mamy

$$\int f(x) = \int m(x) f(x^{-1}).$$

Teraz definiujemy

$$f^*(x) = m(x) \bar{f}(x^{-1}).$$

Można sprawdzić że jest to inwolucja w $L^1(G)$.
W $L^1(G)$ istnieje jedynka aproksymatywna, tzn. taka rodzina funkcji u_n że $\|u_n\| = 1$ i dla dowolnego $f \in L^1(G)$ mamy

$$u_n f \to f$$

gdy n dąży do nieskończoności.
Mówimy że podprzestrzeń W reprezentacji $L^1(G)$ jest zerowa jeśli $fv = 0$ dla dowolnego $f \in L^1(G)$ i $v \in W$.
Jeśli ρ jest ciągłą reprezentacją G to dla $f \in L^1(G)$ definiujemy

$$\rho(f) = \int f(g) \rho(g)$$

Ten wzór zadaje *-reprezentację $L^1(G)$.

Lemat 1.9 *Powyższy wzór zadaje 1-1 odpowiedniość między ciągłymi reprezentacjami unitarnymi G i *-reprezentacjami $L^1(G)$ bez podprzestrzeni zerowych*

Dowód. (szkic) Mając daną reprezentację $L^1(G)$ musimy otrzymać reprezentację G. Używając jedynkę aproksymatywną u_n definujemy

$$\rho(g)w = \lim \rho(\delta_g u_n) w.$$

Dla $w = \rho(f)v$ mamy

$$\rho(g)w = \lim \rho(\delta_g u_n)\rho(f)v = \lim \rho(\delta_g u_n f)v = \rho(\delta_g f)v$$

czyli granica istnieje dla w takiej postaci. Niech $V = \{\rho(f)v\}$. Dopełnienie ortogonalne V jest podprzestrzenią zerową dla $L^1(G)$, a więc założenia jest trywialne, czyli V jest gęsta. A więc mamy zbieżność na zbiorze gęstym. Z ograniczoności norm oznacza to że granica istnieje. Podobnie jako że reprezentacja regularna na L^1 jest ciągła to $\rho(g)w$ jest ciągłe dla $w \in V$, czyli otrzymana reprezentacja jest ciągła. Łatwo sprawdzić że całkowanie tak otrzymanej reprezentacji G z powrotem daje reprezentację $L^1(G)$ od której zaczeliśmy. $\square$

Lemat 1.10 *Ciągłe funkcjonały dodatnie ψ na $L^1(G)$ są postaci*

$$\psi(f) = \int f(g)\phi(g)$$

gdzie ϕ jest ciągłą funkcją dodatnio określoną na G.

Dowód: Funkcjonały dodatnie na $L^1(G)$ odpowiadają reprezentacjom cyklicznym $L^1(G)$ te ciągłym reprezentacjom cyklicznym G te zaś ciągłym funkcjom dodatnio określonym na G. Łatwo sprawdzić że odpowiedniość jest dana przez wskazany wzór. $\square$

Uwaga: Z analizy funkcjonalnej wiadomo że funkcjonały na $L^1(G)$ są zadane przez funkcje ograniczone, być może nieciągłe. Powyższy lemat mówi że funkcje dające funkcjonały dodatnie automatycznie są ciągłe. Tą ciągłość trudno pokazać inaczej niż to zrobiono wyżej.

Lemat 1.11 *Jeśli A jest *-algebrą unormowaną z jedynką to zbiór P funkcjonałów dodatnich na A o normie ograniczonej przez stałą r, jest zbiorem zwartym w *-słabej topologii na A'.*

Dowód: A jest przestrzenią Banacha więc kula B o promieniu r w A' jest zwarta w *-słabej topologii. P jest domkniętym podzbiorem B w *-słabej topologii więc też jest zwarty. $\square$

Niech G będzie grupą lokalnie zwartą i niech Λ będzie zbiorem ciągłych funkcji dodatnio określonych na G takich że $\phi(e) \leq 1$ gdzie e jest jedynką w G. Oznaczmy przez Λ_1 podzbiór Λ składający się z funkcji przyjmujących wartość 1 w e. Niech Ω będzie zbiorem punktów ekstremlnych Λ i niech $\Omega_1 = \Omega \cap \Lambda_1$. Jak już pokazaliśmy dla grupy abelowej reprezentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe a odpowiadające im funkcje dodatnio określone (które w tym przypadku są charakterami) są homomorfizmami w liczby zespolone o module 1. A więc jeśli G jest lokalnie zwartą grupą abelową to Ω_1 składa się z charakterów. Zauważmy że Ω_1 z mnożeniem punktowym jako działaniem jest grupą abelową, przy tym jest grupą topologiczną zarówno w topologii odziedziczonej z Λ jak i w topologii zbieżności jednostajnej (te dwie topologie są identyczne, ale wymaga to dowodu).

Lemat 1.12 *Jeśli G jest lokalnie zwartą grupą abelową to Ω z topologią odziedziczoną z Λ jest przestrzenią zwartą, a Ω_1 jest przestrzenią lokalnie zwartą.*

Dowód: Jako że grupa G jest abelowa to repreentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe. Elementy Ω odpowiadają reprezentacjom nieprzywieddlnym, a więc jednowymiarowym. Dla reprezentacji jednowymiarowej ω daje homomorfizm z

$L^1(G)$ w liczby zespolone. Ale zbiór homomorfizów jest domkniętym podzbiorem Λ. Mianowicie ω jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $f_1, f_2 \in L^1(G)$ zachodzi równość

$$\langle f_1, \omega\rangle\langle f_2, \omega\rangle = \langle f_1 f_2, \omega\rangle.$$

Ale z definicji $\langle f_1, \omega\rangle$ jest funkcją ciągłą ω, więc równość wyżej to równość funkcji ciągłych czyli zbiór ω dla których zachodzi równość jest domknięty. Jako domknięty podzbiór zbioru zwartego Ω jest zbiorem zwartym. Ω_1 to Ω z usuniętym punktem 0, więc jest lokalnie zwarte. $\square$

Lemat 1.13 *Przy oznaczeniach wyżej powłoka wypukła Ω jest gęsta w Λ. Jeśli G jest grupą abelową lub G ma bazę przeliczalną to dla dowolnego $\phi \in \Lambda_1$ istnieje miara probabilistyczna μ na Ω_1 taka że*

$$\phi(g) = \int_{\Omega_1} \omega(g) d\mu(g).$$

Dowód: Zauważmy najpierw że gdy funkcjonał dodatni jest zadany przez funkcję dodatnio określoną ϕ to jego norma to $\phi(e)$. A więc zbiór ϕ o normie nie przekraczającej 1 to dokładnie zbiór ϕ takich że $\phi(e) \leq 1$. Na mocy poprzedniego lematu ten zbiór jest zwarty w *-słabej topologii, a więc jest domkniętą powłoką wypukłą zbioru swoich punktów ektremalnych (jest to teza twierdzina Kreina-Milmana). Czyli Ω jest domkniętą powłoką wypukłą Λ, co daje pierwszą część.
Zauważmy teraz że $\Omega = \Omega_1 \cup \{0\}$. Jeśli G jest grupą abelową to na mocy lematu 1.12 Ω jest przestrznią zwartą a Ω_1 lokalnie zwartą. Wiadomo że dla przestrzeni zwartej również przestrzeń miar probablistycznych jest zwarta, czyli przestrzeń $M(\Omega)$ miar probabilistycznych na Ω jest zwarta. Odwzorowanie $\mu \mapsto \phi$ zadane wzorem wyżej jest ciągłe, więc jego obraz jest domkniętym i wypukłym podzbiorem Λ. Biorąc jako μ miarę skupioną w jednym punkcie ω widzimy że obraz zawiera Ω, więc na mocy pierwszej części jest równy Λ. Widać że jeśli $\phi(e) = 1$ to miara μ musi być skupiona na Λ_1, co daje wynik dla grup abelowych. Jeśli G ma bazę przeliczalną to $L^1(G)$ jest przestrzenią ośrodkową i również Λ jest przestrzenią ośrodkową. Teraz wynik otrzymujemy na mocy twierdzenia Chocqueta. $\square$

Szczególny przypadek: jeśli ϕ jest funkcją dodatnio określoną na $\mathbb{R}^n$ i $\phi(0) = 1$ to istnieje miara μ na $\mathbb{R}^n$ taka że

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle x, a\rangle) d\mu(a).$$

Przykład:

$$\exp(-\|x\|^2) = (4\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle x, a\rangle) \exp(-\|a\|^2/4) da$$

Kontr-przykład: Niech H będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta z dodawaniem jako działaniem grupowym. Niech $\phi(x) = \exp(-\|x\|^2)$. Wtedy ϕ jest ciągłą funkcją dodatanio określoną na H ale wzór z Lematu 1.13 *nie* zachodzi. Mianowicie, aby sprawdzić że ϕ jest dodatnio określona wystarczy testować na elementach $\mathbb{C}[H]$. Element $\mathbb{C}[H]$ jest skupiony na skończnie wielu elementach H, a więc na przestrzeni skończnie wymiarowej, która jest izomorficzna z $\mathbb{R}^n$ dla odpowiedniego n. Jako że odpowiednia funkcja na $\mathbb{R}^n$ jest dodatnio określona to ϕ jest dodatnio określona. Oczywiście ϕ jest ciągła. Aby pokazać że wzór z Lematu 1.13 nie zachodzi zauważmy że ekstremalne funkcje dodatnio określone to charaktery H. W notatkach do wykładu 9 uzasadnialiśmy że charaktery H są postaci $\omega(x) = \exp(il(x))$ gdzie l jest ciągłym funkcjonałem liniowym na H. Ciągłe funkcjonały liniowe na H są postaci $l(x) = \langle x, a\rangle$, czyli $\Omega_1 = H$. Innymi słowy mielibyśmy miarę skupioną na H spełniającą

$$\exp(-\|x\|) = \int_{a\in H} \exp(-\langle x, a\rangle d\mu(a).$$

W dodatku (lemat 2.4) pokażemy że jest to niemożliwe.

Dla lokalnie zwartych grup abelowych można zbudować teorię transformacji Fouriera podobną do klasycznej teorii całki i szeregów Fouriera. Mianowicie, dla $\omega \in \Omega_1$ i $f \in L^1(G)$ definiujemy transformację Fouriera wzorem

$$\hat{f}(\omega) = \int f(g)\omega(g)^{-1}dg$$

gdzie całkowanie jes względem miary Haara. Jako że ω jest homomorfizmen na L^1 to mamy wzór

$$\widehat{f_1 * f_2}(\omega) = \hat{f}_1(\omega)\hat{f}_2(\omega).$$

Mamy też wzór

$$\hat{f^*}(\omega) = \bar{\hat{f}}(\omega). \tag{1}$$

Mianowicie

$$\begin{aligned}\hat{f^*}(\omega) &= \int \overline{f(g^{-1})}\omega(g)^{-1}dg = \int \overline{f(g)}\omega(g)dg \\ &= \int \overline{f(g)\omega(g)^{-1}}dg = \bar{\hat{f}}(\omega)\end{aligned}$$

gdzie użyliśmy równość $\omega(g^{-1}) = \omega(g)^{-1} = \overline{\omega(g)}$. Użyliśmy też wzór

$$\int f(g)dg = \int f(g^{-1})dg$$

który wynika z tego że G jest grupą abelową i miara Haara na G jest dwustronnie niezmiennicza.

Lemat 1.14 *Jeśli $f \in L^1(G)$ to $\hat{f} \in C_0(\Omega_1)$, tzn. $\hat{f}$ jest funkcją ciągłą znikającą w nieskończoności na Ω_1. Obraz $L^1(G)$ przez transformację Fouriera jest gęsty w $C_0(\Omega_1)$.*

Dowód: Zauważmy że dla $\omega \in \Omega$ wartość $\hat{f}(\omega)$ jest po prostu wartością funcjonału liniowego odpowiadającego ω^{-1} na f. Z definicji topologi na Ω przy ustalonym f wartość funkcjonału na f jest funkcją ciągłą. Dla $\omega = 0$ wartość funkcjonału to 0, a więc na Ω_1 funkcja $\hat{f}$ znika w nieskończoności.
Na mocy wzoru (1) obraz transformacji Fouriera jest zamknięty na sprzężenie zespolone. Rozdziela też punkty (jeśli funkcjonały są równe dla każdego $f \in L^1$ to są równe) i nie zeruje się w żadnym punkcie Ω_1. A więc na mocy twierdzenia Stona-Weierstrassa jest gęsty w $C_0(\Omega_1)$. □

Lemat 1.15 *Jeśli G jest lokalnie zwartą grupą abelową to miaru μ z lematu 1.13 jest wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód: Jeśli ϕ jest funkcją dodatnie określoną a μ spełnia równość z lematu 1.13 to dla $f \in L^1$ mamy

$$\int f(g)\phi(g)dg = \int f(g)\int \omega(g)d\mu(\omega)dg = \int\int f(g)\omega(g)dgd\mu(\omega)$$

$$= \int \hat{f}(\omega^{-1})d\mu(\omega).$$

Jeśli μ_1 i μ_2 są dwoma miarami spełniającymi wzór z lematu 1.13 to dla każdego $f \in L^1(G)$ mamy

$$\int \hat{f}(\omega^{-1})d(\mu_1 - \mu_2)(\omega) = 0.$$

Na mocy lematu 1.14 obraz transformacji Fouriera jest gęsty w $C_0(\Omega_1)$, więc $\mu_1 - \mu_2 = 0$. □

Lemat 1.16 *Przy oznaczeniach i założeniach jak wyżej istnieje miara ν na Ω_1 taka że dla każdego $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ i każdego $g \in G$ zachodzi równość*

$$f^* * f(g) = \int |\hat{f}|^2(\omega)\omega(g)d\nu(\omega).$$

W szczególności $\|f\|_{L^2(\mu)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\nu)}$. Ponadto obraz $L^1(G)\cap L^2(G)$ przez transformację Fouriera jest gęsty w $L^2(\nu)$.

Dowód: Dla $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ funkcja $f^* * f$ jest ciągła i dodatnio określona na G, więc na mocy lematów 1.13 i 1.15 istnieje dokładnie jedna miara μ_f taka że

$$f^* * f(g) = \int \omega(g)d\mu_f(\omega).$$

Biorąc funkcję $h \in L^1(G)$ mamy

$$\begin{aligned} h * f^* * f(g) &= \int h(s) f^* * f(s^1 g) ds = \int h(s) \int \omega(s^{-1} g) d\mu_f(\omega) ds \\ &= \int \omega(g) \int h(s)\omega(s^{-1}) ds d\mu_f(\omega) = \int \omega(g) \hat{h}(\omega) d\mu_f(\omega). \end{aligned}$$

Biorąc $h = w^* * w$ mamy $\hat{h} = |\hat{w}|^2$, czyli wzór wyżej przybiera postać

$$w^* * w * f^* * f(g) = \int \omega(g) |\hat{w}|^2 d\mu_f(\omega)$$

Jako że $w^* * w * f^* * f = (w * f)^* * (w * f)$ to $w^* * w * f^* * f$ jest dodatnio określona i mamy

$$\mu_{w*f} = |\hat{w}|^2 \mu_f.$$

Jako że G jest przemienna to zachodzi symetryczny wzór

$$\mu_{w*f} = |\hat{f}|^2 \mu_w$$

czyli

$$|\hat{w}|^2 \mu_f = |\hat{f}|^2 \mu_w$$

czyli

$$\frac{1}{|\hat{f}|^2} \mu_f = \frac{1}{|\hat{w}|^2} \mu_w$$

po ograniczeniu do zbioru takich ω że $\hat{f}(\omega) \neq 0$ i $\hat{w}(\omega) \neq 0$. Teraz możemy zdefiniować ν: jeśli $\hat{f} \neq 0$ na zbiorze otwartym U to przyjmujemy

$$\mu|_U = \frac{1}{|\hat{f}|^2} \mu_f|_U.$$

Na mocy wzoru wyżej te określenia zgadzają się dla różnych f. Ponadto dla każdego ω istniej $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ takie że $\hat{f}(\omega) \neq 0$. A więc ν jest dobrze określona i mamy

$$f * f^*(g) = \int |\hat{f}|^2(\omega) \omega(g) d\nu(\omega).$$

Ten wzór wymusza nasze określenie, czyli ν jest wyznaczona jednoznacznie.
Niech W będzie domknięciem w $L^2(\nu)$ obrazu transformacji Fouriera $L^1(G) \cap L^2(G)$. Wzór

$$\widehat{h * f} = \hat{h}\hat{f}$$

dla $h \in L^1$ i $f \in L^1 \cap L^2$ oznacza że W jest zamknięte na mnożenie przez transformacje Fouriera funkcji z $L^1(G)$. Ale transformacje Fouriera funkcji z $L^1(G)$ są gęste w $C_0(G)$. Na mocy lematu z notatek do wykładu 10 po ograniczeniu do zbiorów U jak wyżej $W \cap L^2(U)$ jest równe $1_E L^2(\omega)$ dla pewnego zbioru mierzalnego $E \subset U$. Ale określenie ν wyżej pokazuje że modulo zbiory miary 0 mamy $E = U$. Teraz argumentując podobnie jak w notatkach do wykładu 10 pokazujemy że $W = L^2(\nu)$. $\square$

Uwaga: Ogólnie miara ν nie musi być σ-skończona. Powoduje to że musimy operować miarą obciętą do zbioru otwartego o domknieciu zwartym (takie obcięcie jest miarą skończoną co rozwiązuje trudność).
Lemat 1.16 oznacza że transformację Fouriera można rozszerzyć do izometrii $L^2(G)$ z $L^2(\nu)$.

Lemat 1.17 *Operator odwrotny do transformacji Fouriera który zapiszemy jako F^{-1} dla $h \in L^1(\nu) \cap L^2(\nu)$ jest zadany wzorem*

$$F^{-1}h(g) = \int h(\omega)\omega(g)d\nu(\omega).$$

Wzór ten można rozszerzyć przez ciągłość na całe $L^2(\nu)$.

Dowód: Na mocy lematu 1.16 wzór zachodzi dla h postaci $h = \hat{w}$ gdzie $w = f^* * f$ i $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Używając wzór z dowodu lematu 1.16 widzimy że wzór na $F^{-1}h$ jest prawdziwy dla h postaci $\hat{u}\hat{w}$ gdzie $u \in L^1(G)$ a w jest jak wyżej. Jako że obraz transformacji Fouriera L^1 jest gęsty w $C_0(\Omega_1)$ wzór zachowuje się dla h postaci $v * \hat{w}$ gdzie $v \in C_0(\Omega_1)$ a w jest jak wyżej. Funkcje takiej postaci są gęste w $L^1(\nu) \cap L^2(\nu)$ co daje wynik. $\square$

Komentarz: Powyższe wyniki dla grup abelowych można rozszerzyć na pary Gelfanda. Szczegóły pozostawiam jako ćwiczenie.
Lemat 1.13 prowadzi do rozkładu reprezentacji na całkę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
Niech Ω będzie przestrzenią z miarą μ. Zakładamy że dla każdego $\omega \in \Omega$ dana jest przestrzeń Hilberta H_ω. Zakładamy że dane są funkcje X_α takie że dla każdego $\omega \in \Omega$ mamy $X_\alpha(\omega) \in H_\omega$. Ponadto zakładamy że $\langle X_\alpha(\omega), X_\beta(\omega)\rangle_{H_\omega}$ jest mierzalne dla dowolnych α, β i że wartości $X_\alpha(\omega)$ rozpinają X_ω. Niech H będzie przestrzenią funkcji f na Ω takich że $f(\omega) \in H_\omega$, iloczyny skalarne $\langle f(\omega), X_\alpha(\omega)\rangle_{H(\omega)}$ są mierzalne i ponadto są niezerowe tylko dla przeliczalnie wielu α. Dla takich f norma $\|f(\omega)\|_{H_\omega}$ jest mierzalą funkcją ω, dla $f_1, f_2 \in H$ iloczyn skalarny $\langle f_1(\omega), f_2(\omega)\rangle_{H_\omega}$ jest mierzalną funkcją ω (pokażemy to niżej). Ograniczając H do takich funkcji że $\|f\|^2_{H_\omega}$ jest całkowalna otrzymujemy przestrzeń Hilberta. Przy tym iloczyn skalarny jest zadany wzorem

$$\langle f_1, f_2\rangle_H = \int \langle f_1(\omega), f_2(\omega)\rangle_{H_\omega} d\mu(\omega).$$

Tą przestrzeń nazywamy całką prostą H_ω i niekiedy piszemy

$$H = \int H_\omega d\mu(\omega).$$

Komentarz: definicja wyżej jest bardzo ogólna, ale całka prosta zachowuje się dobrze tylko przy dodatkowych założeniach, np. że miara μ jest skończona zaś indeksy α są ze zbioru przeliczanego. Ogólnej Ω może być sumą rozłączną zbiorów Ω_γ o mierze skończonej taką że przy ustalonym γ tylko przeliczalnie wiele X_α jest niezerowe na Ω_γ.
Komentarz: Intuicja dotycząca całki prostej jest naturalna: mamy rodzinę przestrzeni Hilberta zależącą w sposób mierzalny od parametru i budujemy z niej wektorowo wartościową przestrzeń L^2. Ale precyzyjne sformułowanie "zależącą w sposób mierzalny od parametru"wymaga trochę wysiłku, funkcje X_α wyżej służą do tego celu.

Lemat 1.18 *Niech będzie dana całka prosta jak wyżej i przeliczalnym ciąg indeksów α_k, $k = 1, \ldots$. Niech $Y_k = X_{\alpha_k}$. Wtedy istnieją funkcje Z_k takie że $Z_k(\omega) \in H(\omega)$, $\|Z_k(\omega)\|$ jest mierzalna i przyjmuje tylko wartości ze zbioru $\{0, 1\}$ i dla $k \neq j$ $\langle Z_k(\omega), Z_j(\omega)\rangle_{H_\omega} = 0$. Z_k jest kombinacją liniową Y_j, $j = 1, \ldots, k$ ze współcznnikami które są mierzalnymi funkcjami skalarnymi (zespolonumi lub rzeczywistymi). Ponadto domknięta podprzestrzeń H_ω rozpinana przez $Z_k(\omega)$, $k = 1, \ldots$ jest równa domkniętej podprzestrzeni rozpinanej przez $Y_k(\omega)$, $k = 1, \ldots$.*

Dowód. Z_k otrzymujemy stosując do Y_k procedurę ortogonalizacji Gramma-Schmidta dla każdego ω z osobna. Współczynniki w procedurze Gramma-Schmidta pochodzą od iloczynów skalarnych do których stosuje się operacje arytmetyczne. Z założenia iloczyny skalarne Y_k są mierzalne. Indukcyjnie pokazujemy że wszystkie iloczyny skalarne pojawiające się w procedurze są mierzalne. Mianowicie, jak iloczyny skalarne Y_k, $k = 0 \ldots$ oraz Z_k, $k = 1, \ldots, j$ są mierzalne, to współczynniki we $j + 1$ kroku procedury Gramma-Schmidta są mierzalne i Z_{j+1} jest kombinacją liniową Y_k, $k = 1, \ldots, j + 1$ z mierzalnymi współczynnikami. $Z_k(\omega)$ rozpinają tą samą przestrzeń co $Y_k(\omega)$ na mocy własności procedury Gramma-Schmidta. □

Lemat 1.19 *Jeśli f_1, f_2 mają mierzalne iloczyny skalarne z X_α i istnieje przeliczalny podzbiór indeksów I taki że dla $\alpha \notin I$ iloczyny skalane f_1 i f_2 z X_α są zerowe, to iloczyn skalarny $\langle f_1(\omega), f_2(\omega)\rangle_{H_\omega}$ jest mierzalny.*

Dowód: Ustawmy elementy I w ciąg $\{\alpha_k\}$, $k = 1, \ldots$. Niech $Y_k = X_{\alpha_k}$. Bierzemy funkcje Z_k z lematu 1.18. Jako że $\langle f_i(\omega), X_\alpha\rangle_{H_\omega} = 0$ dla $\alpha \notin I$, to $f_i(\omega)$ należy do domkniętej podprzestrzeni H_ω rozpinanej przez $Y_k(\omega)$. Niezerowe $Z_k(\omega)$ dają bazę ortonormalną tej przestrzeni, a więc

$$\langle f_1(\omega), f_2(\omega)\rangle_{H_\omega} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_1(\omega), Z_k(\omega)\rangle_{H_\omega} \langle Z_k(\omega), f_2(\omega)\rangle_{H_\omega}$$

Jako że Z_k są kombinacjami liniowymi Y_k z mierzalnymi współczynnikami a iloczyny skalarne f_i z Y_k są mierzalne z założenia to wszystkie wyrazy sumy wyżej są mierzalne. A więc powyższy iloczyn skalarny jako przeliczalna suma funkcji mierzalnych jest mierzalny. □

Następny lemat wynika bezpośredni z definicji:

Lemat 1.20 *Niech H będzie całką prostą $H(\omega)$ jak wyżej i niech h będzie ograniczoną funkcją mierzalną na Ω. Wtedy mnożenie punktowe przez h zadaje operator ograniczony na H.*

Lemat 1.21 *Niech H będzie całką prostą $H(\omega)$ taką że miara μ jest skończona i indeksy α są ze zbioru przeliczlnego. Niech a będzie funkcją na Ω taką że $a(\omega)$ jest operatorem ograniczonym na $H(\omega)$, dla każdego α, β iloczyn skalarny*

$$\langle a(\omega)X_\alpha(\omega), X_\beta(\omega)\rangle$$

jest mierzalny i $\|a\|$ jest ograniczona. Wtedy wzór

$$(Af)(\omega) = a(\omega)f(\omega)$$

zadaje operator ograniczony na H komutujący z operatorami mnożenia przez funkcje. Każdy operator komutujący z wszystkimi operatorami mnożenia przez funkcje jest takiej postaci.

Dowód: Z założnia α są ze zbioru przeliczalnego więc używając lemat 1.18 można zastąpić X_α przez ortogonalne Z_k z tego lematu. Jako że Z_k są kombinacjami liniwymi X_α z mierzalnymi współczynnikami to założenia lematu są spełnione dla Z_k. Niech

$$\psi_{k,j} = \langle a(\omega)Z_k, Z_j\rangle_{H_\omega}$$

Dowolne $f \in H$ można zapisać w postaci

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\omega)Z_k$$

biorąc $c_\omega = \langle f(\omega), Z_k\rangle_{H_\omega}$. Mamy wtedy

$$\langle a(\omega)f(\omega), Z_j\rangle_{H_\omega} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{k,j}(\omega)c_k(\omega)$$

a więc iloczyn skalarny wyżej jest mierzalny. Jako że norma $a(\omega)$ jest ograniczona powiedzmy przez M to

$$\|a(\omega)f(\omega)\|_{H_\omega} \leq \|a(\omega)\|_{H_\omega}\|f(\omega)\|_{H_\omega} \leq M\|f(\omega)\|_{H_\omega}$$

czyli $\|af\|^2_{H_\omega}$ jest całkowalna z kwadratem, czyli $af \in H$. Oczywiście otrzymany operator jest liniowy a jego norma jest ograniczona przez M. Z określenia widać że A komutuje z operatorami mnożenia przez funkcje mierzalne.

Niech teraz A będzie operatorem ograniczonym na H komutującym z operatorami mnożenia przez funkcje. Jako że miara μ jest skończona to $Z_k \in H$. A więc można zdefiniować $\psi_{k,j}$ wzorem

$$\psi_{k,j}(\omega) = \langle AZ_k(\omega), Z_j(\omega)\rangle_{H_\omega}$$

Niech $f_l = \sum_{k=1}^{n} c_{k,l} Z_k$, gdzie $l \in 1, 2$, $c_{k,l}$ są wymierne (dla skalarów rzeczywistych) lub mają wymierną część rzeczywistą i urojoną (dla skalarów zespolonych). Jako że suma wyżej ma stałe współczynniki zaś Z_k mają normy ograniczone przez 1 to dla każdego ω $w_l = \|f_l(\omega)\|_{H\omega} < \infty$. Niech $h_l = \frac{1}{w_l} f_l$ dla tych ω gdzie $w_l > 0$ i $h_l = 0$ dla tych ω gdze $w_l = 0$. Wtedy $\|h_l(\omega)\|_{H\omega} \le 1$. Biorąc u_l, $l = 1, 1$ takie że $u_l \in L^\infty(\mu)$, to jako że A komutuje z operatorami mnożenia przez funkcje to mamy

$$\langle Au_1 h_1(\omega), u_2 h_2(\omega)\rangle_{H_\omega} = u_1(\omega)\bar{u}_2(\omega)\langle (Ah_1)(\omega), h_2(\omega)\rangle_{H_\omega}$$

czyli biorąc $\eta(\omega) = \langle (Ah_1)(\omega), h_2(\omega)\rangle_{H_\omega}$ mamy

$$|\int u_1(\omega)\bar{u}_2(\omega)\eta(\omega)d\mu(\omega)| = |\langle Au_1 h_1, u_2 h_2\rangle| \le \|Au_1 h_1\|_H \|u_2 h_2\|_H$$

$$\le \|A\|\|u_1 h_1\|_H \|u_2 h_2\|_H \le C\|A\|\|u_1\|_{L^2(\mu)}\|u_2\|_{L^2(\mu)}$$

Wynika stąd że operator mnożenia przez η rozszerza się do operatora ograniczonego na $L^2(\mu)$ z normą $\|A\|$. Wiadomo że norma operatora mnożenia przez η to $\|\eta\|_{L^\infty(\mu)}$, czyli

$$\|\eta\|_{L^\infty(\mu)} \le \|A\|.$$

Namy przeliczalnie wiele możliwych n i f_1, f_2, a więc istnieje zbiór E miary 0 taki że dla $\omega \notin E$ i dowolnych n, f_1, f_2 jak wyżej mamy

$$|\langle (Ah_1)(\omega), h_2(\omega)\rangle_{H_\omega}| \le \|A\|$$

Jako że w_1 jest ograniczone to $w_1 Ah_1 = Aw_1 h_1 = Af_1$. To daje odpowiednią równość dla prawie wszystkich ω, czyli powiększając E dla $\omega \notin E$ mamy też

$$|\langle (Ahf_1)(\omega), f_2(\omega)\rangle_{H_\omega}| \le \|A\|\|f_1(\omega)\|_{H_\omega}\|f_2(\omega)\|_{H_\omega}$$

Mamy też

$$\langle (Ahf_1)(\omega), f_2(\omega)\rangle_{H_\omega} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{k,1}\bar{c}_{k,2}\psi_{k,j}(\omega)$$

Przy ustalonym ω wartości $f_1(\omega)$ i $f_2(\omega)$ tworzą zbiór gęsty w H_ω, więc operator $a(\omega)$ z macierzą $\psi_{k,j}$ jest ograniczony na H_ω i ma normę mniejszą lub równą normie $\|A\|$. Wszystkie równości są poza E, na E definiujemy $a(\omega)$ jako 0. Oczywiście a spełnia założenia mierzalności z pierwszej części, więc wyznacza operator ograniczony $\tilde{A}$ spełniający dla $\omega \notin E$

$$\langle \tilde{A}Z_k(\omega), Z_j(\omega)\rangle_H(\omega) = \langle AZ_k(\omega), Z_j(\omega)\rangle_H(\omega).$$

Biorąc kombinacje liniowe Z_j z mierzalnym współczynnikami i całkując obie strony widzimy teraz że
$$\langle \tilde{A}f, h\rangle = \langle Af, h\rangle$$
dla f i h postaci $\sum_{k=1}^{n} c_k Z_k$ z mierzalnymi i ograniczonymi c_k. Dowolny $f \in H$ jest granicą f postaci wyżej, więc równość wyżej zachowuje się dla dowolnych $f, h \in H$. Ale to oznacza że $\widetilde{A} = A$. □

Niech ϕ będzie funkcją dodatnio określoną dla której zachodzi wzór z lematu 1.13. Zakładamy że G ma bazę przeliczalną, w szczególności G jest ośrodkowa.

Lemat 1.22 *Przy założenich wyżej reprezentacja cykliczna odpowiadająca ϕ jest izomorficzna z podprzestrzenią całki prostej reprezentacji opowiadających ω.*

Dowód: Niech H będzie przestrzenią reprezentacji cylkicznęj z wektorm cyklicznym v odpowiadającą ϕ zaś H_ω będzie reprezentacją cykliczną z wektorem cyklicznym v_ω odpowiadającą ω. Na mocy lematu 1.13 dla dowolnego g in G mamy
$$\langle \delta_g v, v\rangle = \phi(g) = \int \omega(g) d\mu(\omega) = \int \langle \delta_g v_\omega, v_\omega\rangle_{H_\omega} d\mu(\omega)$$
Wzór ten rozszerza się przez liniowość na $\mathbb{C}[G]$, tzn. dla każdego $f \in \mathbb{C}[G]$ mamy
$$\langle fv, v\rangle = \int \langle fv_\omega, v_\omega\rangle_{H_\omega} d\mu(\omega)$$
Ogólniej dla $f, h \in \mathbb{C}[G]$ mamy
$$\langle fv, hv\rangle = \langle h^* fv, hv\rangle = \int \langle h^* fv_\omega, v_\omega\rangle_{H_\omega} d\mu(\omega) = \int \langle fv_\omega, hv_\omega\rangle_{H_\omega} d\mu(\omega) \tag{2}$$
Zauważmy przy tym że iloczyny skalarne wyżej jako funkcje ω są kombinami liniowmi wartości ω w odpowiednich punktach, więc są ciągłe. W szczególności są mierzalne.
Niech O będzie przeliczalnym gęstym podzbiorem G. Niech B będzie zbiorem elementów $\mathbb{C}[G]$ postaci $f = \sum_g c_g \delta_g$ z $g \in O$ i c_g mającymi wymierną część rzeczywistą i urojoną. Jako że sumy wyżej są skończone to B jest zbiorem przeliczalnym. Na $\mathbb{C}[G]$ rozpatrujemy toplogię mocnej zbieżności obrazów we wszystkich ciągłych reprezentacjach unitarnych. W takiej topologii B jest gęste. Mianowicie, jako że B jest gęsty w G to $\{\delta_g : g \in B\}$ jest gęsty w $\{\delta_g : g \in G\}$. Współczynniki wyżej są gęste w liczbach zespolnych, więc możemy przybliżać dowolne zespolone kombinacje liniowe. Dla $f \in B$ niech $X_f(\omega) = fv_\omega$. Jako że obraz B jest gęsty w obrazie $\mathbb{C}[G]$, to X_f wyżej tworzą zbiór gęsty w H_ω. Następnie
$$\langle X_f, X_h\rangle_{H_\omega} = \langle fv_\omega, hv_\omega\rangle_{H_\omega}$$

co jak uzasadniliśmy jest funkcją mierzalną na Ω. Na mocy wzoru (2) mamy

$$\|fv\|_H^2 = \langle fv, f\rangle_H = \int \langle X_f, X_f\rangle_{H_\omega}$$

a więc X_f są elementami całki prostej. Wzór (2) oznacza teraz że przyporządkowanie $fv \mapsto X_f$ jest izometrią Bv z odpowiednim podzbiorem całki prostej. Przez ciągłość ta izmetria rozszerza się na izomerię domknięcia Bv z pewną podprzestrzenią całki prostej. Ale Bv jest gęste w H, więc jest to izometria H z podprzestrzenią całki prostej. □

Komentarz: Ogólne nie daje się więcej powiedzieć, tzn. możemy dostać podprzestrzeń właściwą. Mianowicie, może się zdarzyć że reprezentacje na H_ω dla różnych ω są równoważne. Intuicyjne jeśli reprezentacje odpowiadające ω_1 i ω_2 są równoważne, to wartości X_f w ω_1 i ω_2 są zależne. Całka prosta pozwala na dowolne wartości w punktach, dlatego może dać większą przestrzeń.
Nieco silniejsze twierdzenie o rozkładzie można otrzymać w podony ale inny sposób.

Lemat 1.23 *Jeśli A jest przemienną *-algebrą operatorów ograniczonych na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H, to H jest izomorficzna z całką prostą pewnych H_ω względem miary probabilistycznej na spektrum A (gdzie spektrum to przestrzeń homomorfizmów z A w $\mathbb{C}$). W całce prostej elementy A działają jako mnożenie przez funkcje z L^∞. Przy tym domknięcie obrazu A w mocnej topologii operatorowej daje całe L^∞.*

Dowód: (szkic) Niech Ω oznacza spektrum A. Argumentując podobnie jak dla grup abelowych można pokazać że funcjonały dodatnie na A przestawiają się jako całki postaci

$$\phi(f) = \int_{\omega\in\Omega} \omega(f) d\mu(\omega)$$

Jeśli v jest wektorem cyklicznym to postępując podobnie jak w dowodzie poprzedniego lematu pokazujemy że H jest izomorficzne ze $L^2(\mu)$ gdzie μ jest miarą reprezentującą funkcjonał $\langle fv, v\rangle$. Przy tym $f \in A$ działa mnożąc przez $m_f(\omega) = \omega(f)$ które przy utalonym f jest funkcją ciągłą i ograniczoną na Ω.
Ogólna reprezentacja na przestrzeni ośrodkowej jest przeliczalną sumą reprezentacji cyklicznych, więc istnieją miary μ_k takie że

$$H = \oplus_{k=1}^\infty L^2(\mu_k).$$

Bez utraty ogólności można zakładać że miary μ_k są probabilistyczne. Bierzemy $\mu = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}\mu_k$. Wtedy $L^2(\mu_k)$ jest izometryczne z podprzestrzenią $L^2(\mu)$. Dokładniej, zbiory miary zero względem μ_k są też miary 0 względem μ. A więc istnieją nieujemne funkcje mierzalne u_k takie że $\mu_k = u_k\mu$ biorąc $d_k = u_k^{1/2}$ mamy $\|f\|_{L^2(\mu_k)} = \|d_k f\|_{L^2(\mu)}$. Niech teraz $w_{k,\alpha}$ będzie przeliczalną basą ortogonalną w $L^2(\mu_k)$. Niech $V = l^2$ będzie przestrzenią Hilberta ciągów sumowalnych

z kwadratem i niech e_k będzie k-tym elementem bazy V. Jako $X_{k,\alpha}$ bierzemy $d_k e_k w_{k,\alpha}$. $X_{k,\alpha}$ są elementami wektorowo wartościowej przetrzeni $L^2(\mu, V)$. Jako H_ω bierzemy podprzestrzeń V generowaną przez $X_{k,\alpha}(\omega)$. Teraz widać że $X_{k,\alpha}$ należą do przestrzeni całki prostej i podprzestrzeń rozpinana przez $X_{k,\alpha}$ przy ustalonym k jest izometryczna z $L^2(\mu_k)$. A więc przestrzeń całki prostej jest izometryczna z sumą prostą $L^2(\mu_k)$ czyli z H. Widać też że funkcje m_f zdefinowane wyżej dają działanie A w przestrzeni całki prostej i że zgadza się to z działaniem na $L^2(\mu_k)$ a więc i z działaniem na H.
Jako że zbiór m_f rozdziela punkty i jest zamknięty na sprzężenie zespolone to jest gęsty w $C_0(\Omega)$ (lub $C(\Omega)$ jeśli A zawiera jedynkę). Oznacza to że domknięcie obrazu A w mocnej topologii operatorowej jest gęstę w $L^\infty(\mu)$. $\square$

Lemat 1.24 *Jeśli G jest grupą lokalnie zwartą z przeliczalną bazą zaś ρ jest reprezentacją G na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H, to H jest izomorficzna z całka prostą H_ω, gdzie ω przebiega pewną przestrzeń z miarą probablistyczną. Przy tym dla każdego ω jest zadana nieprzywidlna reprezentacja ρ_ω na H_ω, dla każdego $f \in L^1(G)$ operatory $\rho_\omega(f)$ spełniają założenia lematu 1.21 i $\rho(f)$ jest równe operatorowi otrzymanemu z działania $\rho_\omega(f)$ jak w lemacie 1.21.*

Dowód: (szkic). Niech A będzie maksymalną *-algebrą przemienną operatorów na H komutującą z działaniem G. Na mocy lematu 1.23 H jest izomorficzna z całką prostą H_ω parametryzowaną przez elementy spektrum Ω algebry A. W przestrzeni całki prostej elementy A działają przez mnożenie i dają całe $L^\infty(\Omega)$ (A jako algebra maksymalna jest domknięta w mocnej topologii operatorowej). Dla $f \in L^1(G)$ operary $\rho(f)$ komutują z A, czyli w całce prostej komutują z $L^\infty(\Omega)$. Przy ustalonym $f \in L^1(G)$ na mocy drugiej części lematu 1.21 oznacza to że istnieje rodzina operatorów $\rho_\omega(f)$ taka że mnożenie punktowe przez $\rho_\omega(f)$ daje ρ. Z dowodu lematu 1.21 wynika że $\rho_\omega(f)$ jest wyznaczone jednoznacznie za wyjątkiem być może ω ze zbioru miary zero. Jeśli $f_1, f_2 \in L^1(G)$ oznacza to że $\rho_\omega(f_1 f_2) = \rho_\omega(f_1)\rho_\omega(f_2)$ za wyjątkiem być może ω ze zbioru miary zero. Jako że G ma bazę przeliczalną to $L^1(G)$ jest ośrodkowe. Niech B będzie zbiorem przeliczalnym gęstym w $L^1(G)$ zamkniętym na splot i mnożenie przez $\mathbb{Q}(i)$ (liczby zespolone mające wymierną część rzeczywistą i urojoną). Rozpatrujemy rodzinę opertorów $\rho_\omega(f)$ dla $f \in B$. Jako że B jest przeliczalny i zamknięty na splot to można zakładać że za wyjątkiem być może ω ze zbiory miary 0 mamy $\rho_\omega(f_1 f_2) = \rho_\omega(f_1)\rho_\omega(f_2)$ dla każdego $f_1, f_2 \in B$. Podobnie można zakładac że za wyjątkiem być może ω ze zbiory miary 0 dla każdych $f_1, f_2 \in B$ i $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}(i)$ mamy $c_1\rho_\omega(f_1) + c_2\rho_\omega(f_2) = \rho_\omega(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ Można też zakładać że norma $\|\rho_\omega(f)\| \leq \|f\|$, bo z dowodu lematu 1.21 wynika że ta nierówność przy ustalonym f zachodzi dla każdego ω za wyjątkiem być może zbioru miary zero. Jako że B jest przeliczalne usuwając zbiór miary zero zapewniamy sobie że nierówność wyżej zachdzi dla każdego pozostałego ω. Warunki wyżej oznaczają że ρ_ω przedłuża się przez ciągłość do reprezentacji $L^1(G)$. Twierdzimy że za wyjątkiem być może ω ze zbioru miary zero ta reprezentacja jest nieprzywiedlna.

Mianowicie, jeśli ρ_ω jest przywiedlna to rzut na podprzestrzeń niezmienniczą daje niezorowy operator samosprzężony $t(\omega)$ o normie 1. Gdyby taki $t(\omega)$ istniał dla ω ze zbioru miary dodatniej to dałoby by się też znaleźć mierzalne $t(\omega)$ jak wyżej. Na mocy lematu 1.21 dałoby to niezerowy operator samosprzężony T komutujący z działaniem $L^1(G)$ i z działaniem A. Ale to przeczyłoby maksymalności A. A więc faktycznie ρ_ω jest nieprzywiedlne dla prawie wszystkich ω. Biarąc odpowidni zbiór E miary zero i zastępując Ω przez $\Omega - E$ widzimy że lemat zachodzi. □

Komentrz: Powyżej $L^2(\Omega)$ jest ośrodkowe, ale Ω może być bardzo dużą przestrzenią. Ale w dowodzie można zamiast spektrum A można wziąść spektrum ośrodkowej w normie podalgebry A. Wtedy Ω będzie przestrzenią polską.

2 Dodatek o miarach na przestrzeniach Hilberta

Lemat 2.1 *Niech f będzie nieujemną funkcją całkowalną względem miary μ, niech M i t będzą dodatnimi liczbami rzeczywistymi i niech $g(x) = f(x)$ dla $f(x) \leq t$ i $g(x) = 0$ poza tym. Wtedy*

$$\int g(x)^2 d\mu \leq M \int f(x) d\mu + t \int_{\{x: f(x) > M\}} f(x) d\mu.$$

Dowód: Niech $A = \{x : f(x) > M\}$. Dla $x \notin A$ mamy $f(x) \leq M$, czyli $g(x)^2 \leq Mf(x)$. Mamy też $g(x) \leq t$, czyli $g(x)^2 \leq tf(x)$. Razem

$$\int g(x)^2 d\mu = \int_{x \notin A} g(x)^2 d\mu + \int_A g(x)^2 d\mu \leq \int_{x \notin A} Mf(x) d\mu + \int_A tf(x) d\mu$$

$$\leq M \int f(x) d\mu + t \int_A f(x) d\mu$$

□

Lemat 2.2 *Niech X_k $k = 1, \ldots$ będą niezależnymi nieujemnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie i skończonej wartości oczekowanej $m > 0$. Niech a_k, $k = 1, \ldots$ będą liczbami nieujemnymi takimi że $a_k \leq 1$. Wtedy szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k$$

jest zbieżny prawie wszędzie wtedy i tylko wtedy gdy szereg liczbowy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

jest zbieżny

Dowód: Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k X_k\|$ też jest zbieżny czyli szereg funkcyjny jest zbieżny w L^1, co im[likuje że jest zbieżny punktowo prawie wszędzie. Pozostaje pokazać przeciwną implikację. W dalszym ciągu będziemy oznaczać przez μ miarę dającą prawdopodobieństwo na przestrzenie podstawej. Nie wprost, przypuśmy że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k$ jest zbieżny prawie wszędzie zaś szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest rozbieżny. Jako że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k$ jest zbieżny prawie wszędzie to wyraz ogólny prawie wszędzie dąży do 0. Jako że X_k mają ten sam rozkład i są niezerowe oznacza to a_k dąży do 0. Bez utraty ogólności możemy założyć że $a_k > 0$ (zerowe wyrazy nie wpływają na zbieżność szeregów). Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Oznaczmy $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Niech

$$A_k = \{\omega : X_k(\omega) > m s_n / a_k\}, \quad B_k = \{\omega : X_1(\omega) > m s_n / a_k\}$$

i niech $Y_k = X_k$ dla $\omega \notin A_k$ oraz $Y_k = 0$ dla $\omega \in A_k$. Mamy

$$\mu(A_k) = \mu(B_k) \leq \frac{a_k}{m s_n} \int_{B_k} X_1.$$

Jako że a_k dąży do 0 to a_k są ograniczone. Skoro szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest rozbieżny to dla dowolnego ustalonego M istnieje N takie że dla $n > N$ mamy $s_n / a_k > M$, czyli $B_k \subset \{\omega : X_1(\omega) > M\}$ czyli

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{m s_n} \int_{X_1 > M} X_1 \leq \frac{s_n}{m s_n} \int_{X_1 > M} X_1 = \frac{1}{m} \int_{X_1 > M} X_1. \tag{3}$$

Mamy też

$$E((Y_k - m)^2) = E(Y_k^2) - m^2 \leq \int Y_k^2 \leq M \int X_k + \frac{m s_n}{a_k} \int_{X_k > M} X_k$$

$$\leq M \int X_1 + \frac{m s_n}{a_k} \int_{X_1 > M} X_1$$

gdzie w przedostatniej nierówności użyliśmy Lemat 2.1.
Oznaczmy $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k Y_k$. Jako że Y_k są niezależne to mamy

$$E((S_n - m s_n)^2) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 E((Y_k - m)^2) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left(M \int X_1 + \frac{m s_n}{a_k} \int_{X_1 > M} X_1 \right).$$

$$\leq s_n M \int X_1 + m s_n^2 \int_{X_1 > M} X_1.$$

Na mocy nierówności Czebyszewa powyższe implikuje

$$\begin{aligned} \mu(|S_n - m s_n| > \frac{m s_n}{2}) &\leq \frac{4}{m^2 s_n^2} E((S_n - s_n)^2) \\ &\leq \frac{4M}{m s_n} \int X_1 + \frac{4}{m} \int_{X_1 > M} X_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Zauważmy teraz że albo któreś $X_k \neq Y_k$ (czyli ω należy do jednego z A_k), albo $|S_n - ms_n| > ms_n/2$ albo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \geq ms_n/2. \tag{5}$$

Niech C_n oznacza zbiór takich ω że zachodzi nierówność (5). Mamy

$$\mu(C) \geq 1 - \mu(|S_n - ms_n| > \frac{ms_n}{2}) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Ale $\int_{X_1 > M} X_1$ dąży do 0 gdy M dąży do nieskończoności, więc na mocy oszacowania (3) dla dostatecznie dużych M ostatni wyraz będzie dowolnie mały. Podobnie ostatni człon w oszacowaniu (4) będzie dowolnie mały. Skoro szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest rozbieżny to dla dostatecznie dużych n pierwszy człon w oszacowaniu (4) będzie dowolnie mały. A więc dla każdego $\varepsilon_l > 0$ istnieje n_l takie że

$$\mu(C_{n_l}) > 1 - \varepsilon_l.$$

Biorąc $\varepsilon_l = 2^{-l-1}$ widzimy że

$$\mu(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_{n_l}) > 1 - \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l = 1/2$$

Czyli przekrój C_{n_l} ma dodatnią miarę. Ale na przekroju C_{n_l} dla $n = n_l$ zachodzi nierówność (5) co oznacza że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k$ jest rozbieżny. $\square$

Lemat 2.3 *Niech X_k dla $k = 1, \dots$ będą niezalnymi zmiennmi losowymi o jednakowym rozkładzie. Zakładamy że X_k nie jest zerowe i że X_k są całkowalne z kwadratem (czyli $E(X_k^2) < \infty$). Niech e_k dla $k = 1, \dots$ będzie układem ortonormalnym w rzeczywistej przestrzeni Hilberta H i nich a_k będą liczbami rzeczywstymi. Wtedy szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k X_k \tag{6}$$

jest zbieżny prawie wszędzie wtedy i tylko wtedy gdy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

jest zbieżny.

Dowód: Jako że e_k tworzą układ ortonormalny to szereg (6) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 X_k^2$$

jest zbieżny. Niech $b_k = a_k^2$ i $Y_k = X_k^2$ teraz dostajemy wynik stosując lemat 2.2 do b_k i Y_k. □

Lemat 2.4 *Niech A będzie dodatnio określonym operatorem samosprzężonym na rzeczywistej przestrzeni Hilberta H. Wtedy istnienie miary μ takiej że*

$$\exp(-\langle Ax, x\rangle = \int_{a\in H} \exp(i\langle x, a\rangle d\mu(a) \tag{7}$$

jest równoważne temu że A jest operatorem śladowym.

Dowód: Rozważmy najpierw operator w postaci diagonalnej, tzn. zakładamy że istnieje układ ortonormaly e_k, $k = 1, \ldots$ i liczby dodatnie a_k takie że

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle x, e_k\rangle^2.$$

Niech $d_k = a_k^{1/2}$ i niech X_k będą niezależnymi zmiennymi losowymi z gęstością $c\exp(-s^2/4)$ (gdzie c normalizuje gęstość tak by całka była równa 1). Jeśli A jest śladowy czyli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$ jet zbieżny więc na mocy lematu 2.3 szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k X_k$$

jest zbieżny prawie wszędzie. Twierdzimy że rozkład μ sumy spełnia równość (7). Mianowicie, dla ustalonego skończonego n mamy

$$\exp(-\sum_{k=1}^{n} a_k \langle x, e_k\rangle^2) = \prod_{k=1}^{n} \exp(-a_k \langle x, e_k\rangle^2).$$

Z własności rozkładu normalnego

$$\exp(-a_k t^2) = E(\exp(itd_k X_k))$$

czyli

$$\exp(-a_k \langle x, e_k\rangle^2) = E(\exp(i\langle x, e_k\rangle d_k X_k)) = E(\exp(i\langle x, d_k e_k X_k\rangle)).$$

Jako że X_k są niezależne to

$$\prod_{k=1}^{n} \exp(-a_k \langle x, e_k\rangle^2) = E(\exp(i\langle x, \sum_{k=1}^{n} d_k e_k X_k\rangle)).$$

Przechodząc z n do nieskończoności, na mocy zbieżności mamy

$$\exp(-\langle Ax, x\rangle = E(\exp(i\langle x, X\rangle)) = \int_{a\in H} \exp(i\langle x, a\rangle d\mu(a)$$

gdzie $X = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k X_k$. A więc jeśli A jest śladowy to odpowiednie μ istnieje. Następnie pokażemy implikację odwrotną. Niech π_k będzie rzutem ortogonalnym z H na $\mathbb{R}e_k$ i niech μ_k będzie obrazem μ przez π_k. Mamy

$$\exp(-a_k t^2) = \int_{\mathbb{R}} \exp(its) d\mu_k(s)$$

czyli z jednoznaczności miary μ_k ma gęstość normalną $c_k \exp(-s^2/4a_k)$ (gdzie c_k normalizuje gęstość tak by całka była równa 1). Niech $d_k = a_k^{1/2}$ i niech $X_k = d_k^{-1}\langle x, e_k\rangle$. Na mocy powyższego X_k ma rozkład normalny z gęstością $c\exp(-s^2/4)$, czyli X_k mają jednakowe rozkłady i są całkowalne z kwadratem. Podobnie, rozpatrując rzuty na przestrzenie rozpinane przez skończenie wiele e_l widzimy że X_k są niezależne.
Dowolny x z domkniętej podprzestrzeni H_0 rozpinanej przez e_k rozwija się z zbieżny szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k X_k$$

Niech ν będzie rzutem μ na H_0. Szereg wyżej jest zbieżny na H_0, czyli ν-prawie wszędzie, a więc na mocy lematu 2.3 szereg $\sum_{k=0}^{\infty} d_k^2$ jest zbieżny, czyli szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ jest zbiżny, czyli A jest śladowy, co daje wynik dla operatorów w postaci diagonalnej.
Operator śladowy można sprowadzić do postaci diagonalnej, co daje implikację w jedną stronę w ogólnym przypadku. Nie wrost, przypuśćmy że A nie da się sprowadzić do postaci diagonalnej i że istnieje miara μ spełniająca równość (7). Z twierdzenia spektralnego istnieje stała $t > 0$ i nieskończony ciąg wzajemnie ortogonalnych niepustych podprzestrzeni H_ki, $k = 1, \ldots$ talich że dla dowolnego $x \in H_k$ mamy

$$\langle Ax, x\rangle \geq t\|x\|^2.$$

Wybierzmy $x_k \in H_k$ takie że $\|x_k\| = 1$. Niech W będzie domkniętą podprzestrzenią H rozpinaną przez x_k i niech ν będzie rzutem μ na H_k. Niech $t_k = \langle Ax_k, x_k\rangle$ i dla $x \in W$ niech

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k\rangle t_k x_k.$$

Oczywiście B jest w postaci diagonalnej, dla $x \in W$ mamy

$$\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$$

czyli również

$$\langle Bx, x\rangle = \int_{a\in W} \exp(i\langle x, a\rangle) d\nu(a).$$

Na mocy wyniku dla operatorów w postaci diagonalnej wynika stąd że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ jest zbieżny. Ale wiemy że $t_k \geq t > 0$ co daje sprzeczność i oznacza że odpowiednie ν a więc i μ nie istnieje. $\square$