1 Reprezentacje indukowane

1.1 Definicja

Dla grup skończonych G, gdy H było podgrupą a M modułem nad $T = \mathbb{C}[H]$ definiowaliśmy reprezentację indukowną wzorem

$$\mathrm{Ind}_{G/H}(M) = \mathbb{C}[G] \otimes_T M.$$

Dla ogólnych grup i reprezentacji unitarnych ta definicja ma problem: potrzebny jest iloczyn skalarny na $\mathrm{Ind}_{G/H}(M)$ który w ogólnej sytucji nie jest wyznaczony jednoznacznie. Po pierwsze, reprezentacja indukowana z reprezentacji trywialnej podgrupy trywialnej (tzn. $H = \{e\}$) ma dać reprezentację regularną. A więc potrzebujemy miarę niezmienniczą na G, czyli w praktyce G musi być grupą lokalnie zwartą. Aby uniknąć kłopotów topologicznych zakładamy że H jest podgrupą domkniętą.

Dla grup skończonych podaliśmy bardziej konkretną realizację reprezentacji indukowanej, mianowicie realizację w przestrzeni funkcji v z G w M spełniających warunek

$$v(gh^{-1}) = \delta_h v(g)$$

gdzie $\delta_h v(g)$ jest zadane przez działanie H na M. Takie określenie ma sens dla grup nieskończonych. Ale chcielibyśmy umieć całkować kwadrat normy takiej funkcji. Jeśli na G/H instnieje miara niezmiennicza μ na działanie G to można zdefininować normę v wzorem

$$\|v\|_V^2 = \int_{G/H} \|v(g)\|^2 d\mu(gH).$$

Ten wzór na sens bo unitarność δ i warunek wyżej na v oznacza że dla $u \in gH$ mamy $\|v(g)\|^2 = \|v(u)\|^2$ czyli funkcja podcałkowa zależy tylko od gH. Widać że miara niezmiennicza na G/H istnieje dla grup dyskretnych czy nieco ogólniej gdy H jest otwarte (wtedy wystarcza miara licząca dla reprezentantów). Ogólniej gdy G i H mają dwustronnie niezmienicze miary Haara to miara niezmiennicza na G/H istnieje. Ale jest kłopot gdy miara Haara H zmienia się inaczej niż miara Haara H. Dokładniej, dla G istnieje funkcja Δ (nazywana funkcją modularną) taka że

$$\int_G f(gh)dg = \Delta_G(h^{-1}) \int_G f(g)dg, \tag{1}$$

przy tym Δ_G jest homomorfizmem z G w $(0, \infty)$. Podobnie, dla H istnieje funkcja Δ_H taka że

$$\int_H f(gh)dg = \Delta_H(h^{-1}) \int_H f(g)dg. \tag{2}$$

Mamy też wzór

$$\int_H f(h)dh = \int_H \Delta_H(h^{-1}) f(h^{-1})dh. \tag{3}$$

Wiadomo że miara niezmiennicza na G/H istnieje wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $h \in H$ mamy $\Delta_G(h) = \Delta_H(h)$.

Niech f będzie nieujemną funkcją lokalnie całkowalną na G i dla dowolnych $g \in G$, $h \in H$ spełniającą równość

$$f(gh) = \Delta_G(h)^{-1}\Delta_H(h)f(g). \tag{4}$$

Definiujemy pomocnicze odworowanie τ z $C_c(G)$ w $C_c(G/H)$ wzorem

$$\tau\phi(gH) = \int_{h\in H} \phi(gh)dh.$$

Można pokazać że obraz τ jest gęsty w $C_c(G/H)$.

Lemat 1.1 *Niech f będzie nieujemną funkcją lokalnie całkowalną na G spełniającą warunek (4). Wtedy wzór*

$$\int_{G/H} (\tau\phi)d\mu_g = \int_G \phi(g)f(g)dg$$

wyznacza dobrze zdefiniowaną miarę μ_f na G/H, tzn. prawa strona jest zerem gdy $\tau\phi = 0$.

Dowód: Ustalmy ϕ takie że $\tau\phi = 0$. Niech $\psi \in C_c(G)$. Równość $\tau\phi = 0$ i (3) implikuje

$$\int_{h\in H} \phi(gh^{-1})\Delta_H(h^{-1})dh = 0.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
0 &= \int_G \int_H f(g)\psi(g)\phi(gh^{-1})\Delta_H(h^{-1})dhdg \\
&= \int_H \int_G f(g)\psi(g)\phi(gh^{-1})\Delta_H(h^{-1})dgdh \\
&= \int_H \int_G f(gh)\psi(gh)\phi(g)\Delta_G(h)\Delta_H(h^{-1})dgdh \\
&= \int_H \int_G f(g)\psi(gh)\phi(g)dgdh \\
&= \int_G f(g)\phi(g)\left(\int_H \psi(gh)dh\right)dg
\end{aligned}$$

gdzie trzecia równość wynika z równości (1) zaś czwarta równość wynika z równości(4). Teraz wybierajmy ψ tak by $\int_H \psi(gh)dh$ było 1 na nośniku ϕ. $\square$

Teraz rozpatrujemy lokalnie całkowalne funkcje mierzalne v z G w M gdzie M jest przestrzenią Hilberta na której działa reprezentacja H. Aby całka z kwadratu normy v była dobrze określona przyjmujemy warunek

$$v(gh^{-1}) = \Delta^{-1/2}(h)\Lambda(h)^{1/2}\delta_h v(g) \tag{5}$$

gdzie $\delta_h v(g)$ oznacza działanie reprezentacji na $v(g)$. Na mocy Lematu 1.1 dla $\phi \in C_c(G)$ wzór

$$\int_{G/H} (\tau\phi) d\mu_{v,v} = \int_G \phi(g) \|v\|^2(g) dg$$

zadaje dobrze zdefiniowaną miarę dodatnią na G/H. Jako V przyjmujemy przestrzeń funkcji v spełniających warunk (5) i takich że $\mu_{v,v}$ jest miarą skończoną. Definijemy

$$\|v\|^2 = \|\mu_{v,v}\|.$$

Podobnie, dla $v, w \in V$ wzór

$$\int_{G/H} (\tau\phi) d\mu_{v,w} = \int_G \phi(g) \langle v(g), w(g) \rangle dg$$

defininuje na G/H miarę znakowaną, zaś wzór

$$\langle v, w \rangle_V = \mu_{v,w}(G/H)$$

zadaje na V iloczyn skalarny zgodny z normą wyżej. Można pokazać że z tym iloczynem skalarnym V jest zupełna, więc jest przestrzenią Hilberta.

Na V definujemy działanie G wzorem

$$(\rho(g)v)(x) = v(g^{-1}x).$$

Aby pokazać że faktycznie jest to działanie musimy sprawdzić że $\rho(g)v \in V$. Jako że lewe przesunięcia komutują z prawymi to warunek (4) jest spełniony. Aby pokazać że norma jest zachowan rozpatrujemy działania λ na $C_c(G)$ i η na $C_c(G/H)$ zadane wzorami $(\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ i $\eta(f)(xH) = (g^{-1}xH)$. Mamy $\tau\lambda(g)\phi = \eta\tau\phi$ czyli

$$\int_G \phi(x) \|(\rho(g)v)(x)\|^2 dx = \int_G \phi(x) \|v(g^{-1}x)\|^2 dx$$

$$= \int_G \phi(gx) \|v(x)\|^2 dx = \int_G (\lambda(g^{-1})\phi)(x) \|v(x)\|^2 dx$$

czyli

$$\int (\tau\phi) d\mu_{\rho(g)v,\rho(g)v} = \int (\eta(g^{-1})\tau\phi) d\mu_{v,v}.$$

Jako że obraz τ jest gęsty w $C_c(G/M)$ oznacza to że dla dowolnego $\psi \in C_c(G/H)$

$$\int \psi d\mu_{\rho(g)v,\rho(g)v} = \int (\eta(g^{-1})\psi) d\mu_{v,v}.$$

Ale $\eta(g^{-1})$ jest 1-1 na $C_c(G/H)$ i zachowuje normę L^∞, czyli

$$\|\rho(g)v\|^2 = \sup_{\|\psi\|_{L^\infty}=1} \left| \int \psi d\mu_{\rho(g)v,\rho(g)v} \right|$$

$$= \sup_{\|\psi\|_{L^\infty}=1} \left| \int (\eta(g^{-1})\psi) d\mu_{v,v} \right| = \sup_{\|\psi\|_{L^\infty}=1} \left| \int \psi d\mu_{v,v} \right| = \|v\|^2.$$

A więc ρ zachowuje normę V czyli też zachowuje V.

Otrzymaliśmy więc reprezentację unitarną grupy G na przestrzeni V, tą reprezentację nazywamy *reprezentacją indukowaną* z reprezentacji H na M. Symbolicznie $V = \mathrm{Ind}_{G/H}(M)$ czy $\rho = \mathrm{Ind}_{G/H}(\eta)$ gdy η jest reprezentacją H na M.

Przykłady:

1. Gdy $H = \{e\}$ jest podgrupą trywialną zaś η jest reprezentacją trywialną H to $\lambda = \mathrm{Ind}_{G/H}(\eta)$ jest reprezentacją regularną G.

2. Niech G będzie grupą Heisenberga, tzn. G jako zbiór jest identyczne z $\mathbb{R}^3$ zaś mnożenie grupowe jest zadane wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

i niech H będzie podgrupą H składającą się z elementów których pierwsza współrzędna jest równa 0. Niech η będzie jednowymiarową reprezentacją H z charakterem $\chi((0, y, z)) = \exp(iz)$. Wtedy funkcje z przestrzeni V spełniają warunek

$$f((x_1, y_1, z_1)(0, -y_2, -z_2)) = \exp(iz_2) f((x_1, y_1, z_1))$$

czyli

$$f((x_1, y_2 - y_2, z_1 - z_2 - \frac{1}{2}x_1 y_2)) = \exp(iz_2) f((x_1, y_1, z_1)).$$

W szczególności f jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości w punktach postaci $(x, 0, 0)$ i mamy

$$f((x, y, z)) = f((x, 0, 0)(0, y, z - \frac{1}{2}xy)) = \exp(i(-z + \frac{1}{2}xy)) f((x, 0, 0))$$

Przy tym jako że miary Haara G i H są dwustronnie niezmiennicze, to

$$\|f\|_V^2 = \int |f((x, 0, 0))|^2 dx$$

Mamy

$$\begin{aligned}
(\rho((x_1, y_1, z_1))f)((x_2, 0, 0)) &= f((-x_1, -y_1, -z_1)(x_2, 0, 0)) \\
&= f((-x_1 + x_2, -y_1, -z_1 + \frac{1}{2}x_2 y_1)) \\
&= \exp(i(z_1 - \frac{1}{2}x_2 y_1 - \frac{1}{2}(-x_1 + x_2) y_1) f((-x_1 + x_2, 0, 0)) \\
&= \exp(i(z_1 + \frac{1}{2}x_1 y_1 - x_2 y_1)) f((-x_1 + x_2, 0, 0))
\end{aligned}$$

Biorąc $g = (0, y_1, 0)$ dostaniemy operator mnożenia przez $\exp(-ix_2 y_1)$. Na mocy wyników dla grup abelowych podprzestrzenie niezmiennicze dla g takiej postaci są wyznaczone przez podzbiory $E \subset \mathbb{R}$, czyli

$$V_E = \{f \in V : f((x, 0, 0)) = 0 \quad \text{dla } x \neq E\}$$

Biorąc $g = (x_1, 0, 0)$ dostaniemy operatory przesunięcia, więc podprzestrzeń niezmiennicza dla G musi mieć E niezmienniczy (modulo zbiory miary 0) na przesunięcia. Taki E modulo zbiory miary 0 to całe $\mathbb{R}$ lub zbiór pusty. A więc podprzestrzenie to V lub $\{0\}$, czyli otrzymana reprezentacja jest nieprzywiedlna.

1.2 Własności

Zanotujmy jeszcze dodatkowe własności reprezentacji indukowanych:

Lemat 1.2 *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą zaś H jej domkniętą podgrupą. Niech η_1, η_2, będą unitarnymi reprezentacjami H. Wtedy*

$$\mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_1 \oplus \eta_2) = \mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_1) \oplus \mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_2)$$

gdzie znak równości oznacza równoważność reprezentacji.

Oczywiście powyższy lemat rozszerza się na skończone i nieskończone sumy proste.

Jesli η_1 i η_2 są reprezentacjami H zaś w jest operatorem splatajacym (homomorfizmem $\mathbb{C}[H]$-modułów) to operator W zadany wzorem

$$(Wf)(g) = w(f(g))$$

jest operatorem splatającym dla reprezentacji indukowanych.

Zauważmy też że gdy H ma miarę dodatnią (czyli jest podgrupą otwartą) to reprezentacja indukowana $\mathrm{Ind}_{G/H}(\eta)$ ograniczona do H zawiera kopię η. Przy tym przestrzeń M (a właściwie jej kopia) na której działa η jest cykliczna dla $\mathrm{Ind}_{G/H}(\eta)$.

Badanie reprezentacji indukowanych jest prostsze gdy istnieje mierzalny selektor z G/H w G. Dokładniej, niech π oznacza odwzorowanie ilorazowe z G na G/H. Jeśli G jest grupą lokalnie zwartą z przeliczalną bazą topologii to istnieje borelowsko mierzalny selektor z G/H w G, tzn. borelowsko mierzalne $s : G/H \to G$ takie że dla każdego $x \in G/H$ mamy równość $\pi(s(x)) = x$. Mając selektor s dowolny $g \in G$ można zapisać jako $g = s(\pi(g))t(g)$ gdzie $t(g) \in H$. $t(g) = s(\pi(g))^{-1}g$, a więc też jest borelowsko mierzalne. Wyżej, badając reprezentacje grupy Heisenberga użyliśmy elementy postaci $(x, 0, 0)$ które w tym przypadku dają selektor.

Lemat 1.3 *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą zaś H jej domkniętą podgrupą. Niech σ_a, $a \in \Omega$ będą unitarnymi reprezentacjami H na M_a. Zakładamy że dana jest miara μ na Ω. Zakładamy że dane jest mierzalny selektor s z G/H w G. Wtedy*

$$\mathrm{Ind}_{G/H}\left(\int M_a d\mu(a)\right) = \int \mathrm{Ind}_{G/H}(M_a) d\mu(a)$$

gdzie znak równości oznacza równoważność reprezentacji.

Komentarz: W całce prostej wyżej występują pola wektorowe X_α na Ω o wartościach w M_a. Odpowiednie pola o wartościach w $\mathrm{Ind}_{G/H}(M_a)$ otrzymamy rozpatrując funkcje postaci

$$f_{\alpha,\phi}(g, a) = \phi(\pi(g))\sigma_a(t^{-1}(g))X_\alpha(z)$$

gdzie t jest zdefiniowane wyżej. Biorąc ϕ z podzbioru gęstego w $C_c(G/H)$ dostaniemy dostatecznie dużo pól wektorowych.

Lemat o indukcji etapami pozostaje prawdziwy w naszej sytuacji:

Lemat 1.4 *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą zaś H i U jej domkniętymi podgrupami takimi że U jest podgrupą H. Jeśli η jest reprezentacją unitarną U zaś $\sigma = \mathrm{Ind}_{H/U}(\eta)$ to*

$$\mathrm{Ind}_{G/U}(\eta) = \mathrm{Ind}_{G/H}(\sigma)$$

gdzie znak równości oznacza równoważność reprezentacji.

Przykład: Reprezentacja indukowana z reprezentacji regularnej to reprezentacja regularna. Mianowicie niech $U = \{e\}$ będzie podgrupą trywialną zaś η reprezentacją regularną U. Wtedy $\sigma = \mathrm{Ind}_{H/U}(\eta)$ jest reprezentacją regularną H zaś $\mathrm{Ind}_{G/U}(\eta)$ jest reprezentacją regularną G. Ale $\mathrm{Ind}_{G/U}(\eta) = \mathrm{Ind}_{G/H}(\sigma)$ co pokazuje wynik o reprezentacji indukowanej z reprezentacji regularnej.

2 Grupa wolna i grupa automorfizmów drzewa jednorodnego

Najpierw pokażemy lemat który niekiedy pozwala w łatwy sposób pokazać nieprzywiedloność reprezentacji

Lemat 2.1 *Niech A będzie *-algebrą zaś B jej *-podalgebrą. Niech V będzie modułem Hilberta nad A zaś W modułem Hilberta nad B który jest podmodułem A traktowanego jako B-moduł. Zakładamy W jest nieprzywiedny nad B, występuje jednokrotnie w V (tzn. dopełnienie ortogonalne W nie zawiera B-podmodułów izomorficznych z W) i jest cykliczny w V nad A. Wtedy A jest nieprzywiedlny.*

Dowód: Niech U będzie domkniętą podprzestrzenią V zamkniętą na działanie A. Niech π będzie rzutem ortogonalnym z W na U. Na mocy lematu Schura π albo jest zerowy albo jest różnowartościowy. Jeśli π jest zerowy, to W jest ortogonalne do U. Ale U jest A-niezmiennicze zaś W jest cykliczne w V, czyli U jest ortogonalne do V, czyli U jest podprzestrzenią zerową. Jeśli π jest różnowartościowy to można do π zastosować rozkład biegunowy $\pi = ua$ gdzie a jest różnowartościowym operatorem dodatnio określonym na W zaś u jest częściową izometrią z W w U. Jednoznaczność rozkładu biegunowego oznacza że u jest izomorfizmem B-modułów, czyli obraz u jest B-modułem Hilberta izomorficznym z W. Rozpatrując rzutowanie z $u(W)$ na dopełnienie ortogonalne W widzimy że albo $u(W) \subset W$, albo dopełnienie ortogonalne W zawiera B-moduł izomorficzny z W. Ale to ostatnie jest wykluczone z założenia, więc $u(W) \subset W$, czyli $W \subset U$. Jako że U jest A-niezmiennicze zaś W jest cyliczne w V oznacza to że $V \subset U$ czyli $U = V$. □

Niech S będzie zbiorem skończonym mocy co najmiej 2. Niech G będzie grupą wolną generowaną przez S. Ustalmy $s \in S$. s generuje podgupę H izomorficzną z $\mathbb{Z}$. Reprezentacje nieprzywiedlne $\mathbb{Z}$ są jednowumiarowe i mają charakter $\omega_a(k) = \exp(ika)$ gdzie a przebiega $(-\pi, \pi]$. oznaczając przez η_a reprezentacją z charakterem ω_a zaś przez σ reprezentacją regularną $\mathbb{Z}$ mamy

$$\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} \eta_a da$$

gdzie miara podstawowa to miara Lebesque'a na $(-\pi, \pi]$. Niech λ będzie reprezentacją regularną G. Mamy $\lambda = \mathrm{Ind}_{G/H}(\sigma)$, więc

$$\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_a) da$$

Do $\mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_a)$ można zastosować Lemat 2.1. Mianowicie, η_a jest reprezentacją nieprzywiedlną H, czyli nieprzywiednym modułem Hilberta nad $l^1(H)$. Jak zauważyliśmy wcześniej, skoro H ma dodatnią miarę to przestrzeń η_a jest podprzestrzenią V (odpowiadającą warstwie e względzem H). Orbita dwustronna względem H elementu $x \in G - H$ jest nieskończoną sumą orbit typu hxH gdzie $h \in H$, więc V nie zawiera innych wektorów własnych dla H niż te z przestrzni η_a. Innymi słowy η_a występuje jednokrotnie w V. Z budowy przestrzeni V widać że η_a jest przestrzenią cykliczną. A więc założenia Lematu 2.1 są spełnione, czyli $\mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_a)$ jest nieprzywiedlne. Otrzymaliśmy więc rozkład reprezentacji regularnej G w całkę prostą reprezentacji nieprzywiednych. Łatwo też sprawdzić że różne reprezentacji $\mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_a)$ są parami nierównoważne.

Niech $q = 2|S| - 1$ i niech X będzie drzewem jednorodnym takim że każdy wierzchołek ma $q + 1$ sąsiadów. Na drzewie mamy metrykę, tzn. odległość wierzchołków to minimalna długość drogi między nimi takiej że kolejne dwa wierzchołki są sąsiednie. Niech T będzie grupą automorfizmów X, tzn. takich przekształceń odwracalnych X które zachowują odległość. T jest grupą lokalnie zwartą i unimodularną (tzn. miara Haara jest dwustronnie niezmiennicza). Ustalmy element $o \in X$. Niech K będzie podgrupą T zachowującą o. K jest podgrupą zwartą. Można pokazać że para (T, K) jest parą Gelfanda. Mianowicie, niech $t \in T$. Wtedy $d(to, o) = d(o, t^{-1}o) = d(t^{-1}o, o)$ gdzie d oznacza odległość. K działa tranztywnie na wierzchołkach w ustalonej odległości od o, więc istnieje $k_1 \in K$ takie że $k_1 to = t^{-1}o$. A więc $tk_1 to = o$, czyli $k_2 = tk_1 t \in K$, czyli $t^{-1} = k_1 t k_2^{-1}$. Ale to oznacza że $t^{-1} \in KtK$, co jak wiemy oznacza że para (T, K) jest parą Gelfanda.

Funkcje dwustornnie K niezmiennicze na T można utożsamiać z funkcjami radialnymi na X (tzn. takimi f że $f(x) = f(y)$ gdy $d(x, o) = d(y.o)$). Mianowicie, skoro $Ko = o$, to T/K jest naturalnie izomorficzne z X, więc funkcje dwustronnie K-niezmiennicze na T odpowiadają funkcjom ma X które są niezmiennicze na działanie K, czyli funkcjami radialnymi.

X można utożsamiać z grafem Cayley'a G. Mianowicie, niech $A = S \cup S^{-1}$. Przyjmujemy że elementy g_1 i g_2 są sąsiednie gdy $g_1^{-1} g_2 \in A$. Wtedy otrzymany graf jest drzewem jednorodym którego każdy wierzchołek ma $|A| = q + 1$ sąsiadów. Czyli X jest izomorficzne z G traktowanym jako graf. Podobnie jak dla X również na G mamy metrykę i utożsamienie X z G jest izometrią. Wynika stąd że funkcje dwustronnie K-niezmiennicze na T można utożsamiać z funkcjami radialnymi na G.

Dla $g \in G$ operator mnożenia z lewej strony przez g jest izomorfizmem grafu. A więc G można traktować jako podgrupę T działającą tranzytywnie na X. Można sprawdzić że dla funckcji radialnych splot na T i splot na G daje ten sam wynik (dla funkcji nieradialnych taka równość nie zachodzi). Na G mamy wyróżnioną funkcję radialną $\Delta = 1_A$. Δ generuje algebrę funkcji radialnych. Mianowicie, jak f jest funkcją radialną skupioną na słowach długości $n > 0$ i przyjmującą wartość a, to $\Delta * f$ ma wartość qa na słowach długości $n + 1$ i wartość a na słowach długości $n - 1$. To pozwala indukcyjnie względem pokazać że funkcja skupiona na słowach długości n należy do algebry generowanej przez Δ. Ogólniej, funkcja radialna ϕ jest wyznaczona przez ciąg liczb a_n taki że

$$\phi(x) = a_{|x|}$$

gdzie $|x|$ oznacza długość słowa x. Mamy $(\Delta * \phi)(x) = b_{|x|}$ gdzie

$$b_n = \begin{cases} qa_{n-1} + a_{n+1} & \text{dla } n > 0 \\ (q+1)a_1 & \text{dla } n = 0 \end{cases}$$

Wynika stąd że ϕ jest wektorem własnym dla Δ z wartością własną l (tzn. $la_n = b_n$) wtedy i tylko wtedy gdy a_n spełnia równanie

$$la_n = qa_{n-1} + a_{n+1}$$

dla $n > 0$ i $la_0 = (q+1)a_1$. Równanie wyżej ma ogólne rozwiązanie będące kombinacją liniową dwu rozwiązań postaci $a_n = s^n$ gdzie s spełnia $l = qs^{-1} + s$ czyli $s^2 - sl + q = 0$ co jest równaniem kwadratowym względem s (pomijam tu wyjątkowy przypadek gdy $l^2 - 4q = 0$). Zauważmy że jeśli s jest rozwiązaniem równania kwadratowego wyżej to również qs^{-1} jest rozwiązaniem z tym samym l. Zauważmy że suma dwu tych rozwiązań daje również rozwiązanie dla $n = 0$.

Homorofizm z algebry funkcji radialnych w $\mathbb{C}$ jest zadany przez ϕ będące wektorem własnym Δ i takie że $a_0 = 1$. Aby ten homomorfizm odpowiadał *-reprezentacji wartości ϕ muszą być ograniczone i rzeczywiste. A więc l musi być rzeczywiste. Mamy przy tym dwa przypadki: $|l| \geq 2\sqrt{q}$, wtedy s-y są rzeczywiste, jedno s jest większe lub równe co do wartości bezwzględnej niż $\sqrt{q}$, drugie s ma wartość bezwzględną mniejszą lub równą $\sqrt{q}$. W drugim przypadku $|l| \leq \sqrt{q}$, $|s| = \sqrt{q}$ przy tym s-y są zespolone sprzężone. Podsumowując, wzór $\phi_l(x) = a_{|x|}$ z

$$a_n = \frac{1}{2}(s^n + (qs^{-1})^n)$$

i z s jak wyżej daje ogólną postać radialnej funkcji dodatnio określonej.

Odpowiednie reprezentacje daje się otrzymać na równe sposoby. Przy innej konstrukcji (którą tu nie podamy) stosuje się Lemat 2.1 pokazując że odpowiednie reprezentacje T są nieprzywiedlne. Nieco więcej pracy pozwala pokazać że te reprezentacje pozostają nieprzywiedlne po ograniczeniu do G. Przy tym reprezentacje z $|s| = \sqrt{q}$ pozwalają uzyskać rozkład reprezntacji regularnej. Mamy więc

$$\lambda = \int \rho_l d\mu(l)$$

gdzie μ jest miarą z gęstością na $[-\sqrt{q}, \sqrt{q}]$ zaś ρ_l jest reprezentacją nieprzywiedlną odpowiadającą funkcji dodatnio określonej ϕ_l.

Dość łatwo można zauważyć że reprezentacje ρ_l wyżej nie są równoważne żadnej reprezentacji postaci $\mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_a)$ które rozważaliśmy wcześniej. Mianowicie dla $b \in S$, $g_1, g_2 \in G$ mamy $|g_2^{-1} b^n g_1| \to \infty$ dla $n \to \infty$, a więc

$$\langle \rho_l(b^n)\rho_l(g_1)v, \rho_l(g_2)v\rangle = \phi_l(g_2^{-1} b^n g_1) \to 0$$

gdzie v jest wektorem cyklicznym odpowiadającym ϕ_l. Oznacza to że dla dowolnego w w przestrzeni reprezentacji ρ_l mamy

$$\langle \rho_l(b^n)w, w\rangle \to 0$$

czyli w reprezentacji ρ_l operator $\rho_l(b)$ nie ma wektorów własnych (taki wektor miałby wartość własną o module 1). Oczywiście w reprezentacji $\mathrm{Ind}_{G/H}(\eta_a)$ obraz b generującego H ma wektor własny, więc faktycznie te reprezentacje nie są równoważne. A więc otrzymaliśmy dwa istotnie różne rozkłady λ na całkę prostą reprezentacji nieprzywiednych. Jak wspomnieliśmy niejednoznaczność rozkładu jest typowa dla wielu grup dyskretnych, to wyżej to jeden z prostszych przykładów.