# 1 Charaktery

Definicja: Charakterem reprezentacji (modułu) nazywamy odwzorowanie $\phi(a) = \mathrm{Tr}(a)$ gdzie Tr oznacza ślad odwzorowania liniowego.

Inwolucję w $k[G]$ i iloczyn skalarny dla $f = \sum_{g\in G} a_g\delta_g$ i $h = \sum_{g\in G} b_g\delta_g$ definiujemy

$$\check{f} = \sum_{g\in G} a_g\delta_{g^{-1}}$$

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_g b_{g^{-1}}$$

Poniżej będziemy zakładać że charakterystyka ciała $k$ nie dzieli $|G|$, dzięki czemu $\langle f, h\rangle$ jest dobrze zdefiniowane.

**Lemat 1.1** $\check{fh} = \check{h}\check{f}$

Dowód: Sprawdzamy dla $f = \delta_g$, $h = \delta_u$:

$$\begin{aligned}\check{fh} = \check{\delta_g\delta_u} = \check{\delta}_{gu} = \delta_{(gu)^{-1}} = \delta_{u^{-1}g^{-1}} = \delta_{u^{-1}}\delta_{g^{-1}} \\ = \check{\delta}_u\check{\delta}_g = \check{h}\check{f}.\end{aligned}$$

W ogólnym przypadku wynik otrzymujemy przez liniowość. □

**Lemat 1.2** *(Wzór Plancherela) Niech $\lambda$ będzie reprezentacją regularną $k[G]$. Mamy*

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|^2}\mathrm{Tr}(\lambda(fh))$$

Dowód: Dla $f = \delta_g$ i $h = \delta_u$ mamy $\langle f, h\rangle = 0$ dla $g \neq u^{-1}$ i $\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}$ dla $g = u^{-1}$. Podobnie, $fh = \delta_{gu}$ czyli $\mathrm{Tr}(\lambda(fh)) = 0$ dla $g \neq u^{-1}$ i $\mathrm{Tr}(\lambda(fh)) = |G|$ dla $g = u^{-1}$. A więc równość zachodzi dla elementów bazy czyli przez liniowość równość zachodzi na $k[G]$. □

**Lemat 1.3** *Jeśli $k$ jest algebraicznie domknięte, $M_i$ jest $k[G]$ modułem prostym, $e_i$ idempotentem odpowiadającym $M_i$ zaś $\chi_i$ charakterem modułu $M_i$ to dla $f \in k[G]$ mamy*

$$\dim_k M_i\chi_i(f) = |G|^2\langle f, e_i\rangle$$

Dowód: Na mocy twierdzenia Wedderburna $M_i$ występuje w reprezentacji regularnej z krotnością $\dim_k M_i$. A więc mamy

$$\dim_k M_i\chi_i(f) = \mathrm{Tr}(\lambda(fe_i)) = |G|^2\langle f, e_i\rangle$$

gdzie ostatnia równość to wzór Plancherela. □

**Lemat 1.4** *Jeśli $k$ jest algebraicznie domknięte, zaś $M_i$ jest $k[G]$-modułem prostym to jako funkcja na grupie*

$$\chi_i = \frac{|G|}{\dim_k(M_i)} \check{e}_i$$

*gdzie $e_i$ jest idempotentem związanym z $M_i$. W szczególności charakterystyka $K$ nie dzieli $\dim_k(M_i)$ (zakładamy że charakterystyka $K$ nie dzieli $|G|$).*

Dowód. Dla $f = \delta_g$ mamy $|G|\langle f, e_i\rangle = \check{e}_i(g)$. A więc

$$\dim_k(M_i)\chi_i(g) = \dim_k(M_i)\chi_i(f) = |G|^2\langle f, e_i\rangle = |G|\check{e}_i(g)$$

Jako że $|G|\check{e}_i(g)$ jest niezerowe dla pewnego $g$ to wynika stąd że charakterystyka $k$ nie dzieli $\dim_k(M_i)$. □

Wniosek: $\langle \chi_i, \chi_j\rangle = \delta_{ij}$, gdzie $\delta_{ii} = 1$ zaś $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Mianowicie

$$\langle \chi_i, \chi_j\rangle = \frac{|G|^2}{\dim_k(M_i)\dim_k(M_j)} \langle \check{e}_i, \check{e}_j\rangle$$

$$= \frac{1}{\dim_k(M_i)\dim_k(M_j)} \mathrm{Tr}(\lambda(e_j\check{e}_i)).$$

Gdy $i \neq j$ to $e_j e_i = 0$ czyli $\langle \chi_i, \chi_j\rangle = 0$. Dla $i = j$ element $e_i e_i = e_i$ przechodzi na identyczność w $e_i k[G]$ które jest sumą prostą $\dim_k(M_i)$ kopii $M_i$. A więc $\check{e}_i$ przechodzi na identyczność w $\check{e}_i k[G]$ które ma wymiar $\dim_k(M_i)^2$, czyli $\mathrm{Tr}(\lambda(\check{e_i})) = \dim_k(M_i)^2$ co daje $\langle \chi_i, \chi_i\rangle = 1$.

**Lemat 1.5** *Jeśli ciało $k$ jest charakterystki $0$ to $k[G]$ moduły są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy ich charaktery są równe. W szczególności gdy ciało $k$ jest algebraicznie domknięte, $\eta$ jest charakterem $k[G]$ modułu $N$ zaś $M_i$ jest $k[G]$-modułem prostym z charakterem $\chi_i$ to $M_i$ występuje w $N$ z krotnością $\langle \chi_i, \eta\rangle$.*

Dowód. Druga cześć wynika z zależności $\langle \chi_i, \chi_j\rangle = \delta_{ij}$. Mianowicie, rozkładając $N$ na moduły proste mamy

$$N = \oplus_i k_i M_i,$$

$$\eta = \sum_i k_i \chi_i,$$

$$\langle \eta, \chi_j\rangle = \sum_i k_i \langle \chi_i, \chi_j\rangle = k_j.$$

Daje to wynik dla ciała algebraicznie domkniętego. Ponadto mamy

$$\langle \eta, \eta\rangle = \sum_{i,j} k_i k_j \langle \chi_i, \chi_j\rangle = \sum_i k_i^2 > 0.$$

Gdy $k$ jest tylko charakterystyki 0 to można rozumować podobnie. Mianowicie, jak dla ciała algebraicznie domkniętego rozpatrujemy moduły proste $M_i$ i ich charaktery $\chi_i$. Niech $K$ będzie algebraicznym domknięciem $k$. Traktując $M_i$ jako moduł nad $K$ dostaniemy ten sam charakter, ale moduł nie musi być prosty jako moduł nad $K$. Ze wzoru wyżej dostaniemy że

$$\langle \chi_i, \chi_i \rangle > 0.$$

Trzeba jeszcze pokazać że $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$. Traktując $M_i$ i $M_j$ jako moduły nad $K$ widać że $\langle \chi_i, \chi_j \rangle \neq 0$ implikuje że w rozkładzie nad $K$ jest wspólny czynnik, czyli istnieje niezerowy homomorfizm modułów $H$ nad $K[G]$. Homomorfizm modułów możemy reprezentować macierzą nad $K$. To że macierz reprezentuje homomorfizm jest równoważne temu że rozwiązuje układ równań

$$\rho_i(\delta_g)H = H\rho_j(\delta_g)$$

gdzie $\rho_i$ jest reprezentacją odpowiadającą $M_i$ zaś $g$ przebiega elementy grupy. Ten układ równań jest układem równań liniowych. A więc, skoro ma niezerowe rozwiązanie nad $K$ to ma też niezerowe rozwiązanie nad $k$. Ale niezerowe rozwiązanie nad $k$ daje niezerowy homomorfizm modułów nad $k$. Jako że nad $k$ moduły $M_i$ i $M_j$ są proste to z lematu Schura niezerowy homomorfizm jest izomorfizmem, czyli $M_i$ jest izomorficzne z $M_j$. Czyli, jeśli $M_i$ nie jest izomorficzne z $M_j$ to $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$. □

# 2 Iloczyn tensorowy

Niech $R$ będzie pierścieniem przemiennym, zaś $M$ i $N$ będą $R$-modułami. Powiemy że moduł $V$ jest iloczynem tensorowym modułów $M$ i $N$ (co oznaczamy pisząc $V = M \otimes N$) jeśli zadana jest operacja dwuliniowa oznaczana przez $\otimes$ z $M \times N$ w $V$ mająca następującą własność: jeśli $\eta$ jest operacją dwuliniową z $M \times N$ w pewien $R$-moduł $W$ to istnieje dokładnie jedna operacja liniowa $\phi$ z $V$ w $W$ taka że

$$\eta(m, n) = \phi(m \otimes n).$$

Zauważmy najpierw że z definicji wyżej wynika że jeśli produkt tensorowy istnieje to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Mianowicie, jeśli $V_1$ z $\otimes_1$ oraz $V_2$ z $\otimes_2$ są dwoma różnymi produktami tensorowymi to na mocy własności definicyjnej istnieją jedyne odwzorowania liniowe $\phi_1$ i $\phi_2$ takie że

$$m \otimes_2 n = \phi_1(m \otimes_1 n)$$

i

$$m \otimes_1 n = \phi_2(m \otimes_2 n)$$

Wtedy

$$m \otimes_1 n = \phi_2(\phi_1(m \otimes_1 n)).$$

Lecz na mocy definicji istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe mające własność wyżej czyli $\phi_2\phi_1$ to identyczność. Podobnie $\phi_1\phi_2$ to identyczność, czyli $V_1$ jest izomorficzne z $V_2$.

**Lemat 2.1** *Produkt tensorowy istnieje.*

Dowód. Niech $H$ będzie modułem wolnym z bazą $M \times N$. By oznacznia były bardziej sugestywne zamiast $(m, n)$ będziemy pisać $m \otimes n$. W module $H$ definujemy podmoduł $I$ jako podmoduł generowany przez elementy następujących postaci:

$$(a_1m_1 + a_2m_2) \otimes n - a_1m_1 \otimes n - a_2m_2 \otimes n$$

$$m \otimes (a_1n_1 + a_2n_2) - a_1m \otimes n_1 - a_1m \otimes n_2$$

i przyjmujemy $M \otimes N = H/I$. Operacje $\otimes$ definujemy jako klasę $m \otimes n = (m, n)$ w module ilorazowym $H/I$. Łatwo sprawdzić że $\otimes$ jest operacją dwuliniową: wydzielenie przez podmoduł $I$ zapewnia potrzebne równości. Jeśli $W$ jest modułem z definicji iloczynu tensorowego zaś $\eta$ jest operacją dwuliniową z $M \times N$ w $W$ to definujemy $\phi$ w ten sposób że

$$\phi(m \otimes n) = \eta(m, n)$$

Aby $\phi$ było dobrze zdefiniowane musimy sprawdzić że $\phi$ znika na $I$. Lecz to wynika z dwuliniowości $\eta$. Zauważmy że powyższa defincja $\phi$ jest wymuszona przez defincję iloczynu tensorowego, skąd wynika że $\phi$ jest wyznaczone jednoznacznie. $\square$