1 Własności iloczynu tensorowego

Lemat 1.1 *Jeśli M, N, K są R-modułami to $M \otimes N$ jest izomorficzne z $N \otimes M$, $(M \otimes N) \otimes K$ jest izomorficzne z $M \otimes (N \otimes K)$. Jeśli $M = M_1 \oplus M_2$ i $N = N_1 \oplus N_2$ to $M \otimes N$ jest izomorficzne z $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ i $M \otimes N$ jest izomorficzne z $(M \otimes N_1) \oplus (M \otimes N_2)$.*

Dowód. Wynika to używając własność definicyjną. Np. dla $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ mamy operacje $\otimes_i$ z $M_i \times N$ w $M_i \otimes N$ i jest spełniona własność produktu tensorowego dla $M_i \times N$. Pokażemy że $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ spełnia własność produktu tensorowego. Operację $\otimes$ definujemy wzorem

$$(m_1 \oplus m_2) \otimes n = (m_1 \otimes_1 n) \oplus (m_2 \otimes_2 n).$$

Rozważamy teraz operację dwuliniową η z $M \times N$ w W. Ograniczenie η do $M_1 \times N$ daje operację η_1 z $M_1 \times N$ w W. Podobnie ograniczenie η do $M_2 \times N$ daje operację η_2 z $M_2 \times N$ w W. Z własności iloczynu tensorowego dla $M_i \otimes N$ istnieją ϕ_i takie że

$$\eta_i(m, n) = \phi_i(m \otimes_i n)$$

dla $m \in M_i$ i $n \in N$. Wtedy definując ϕ wzorem

$$\phi(t_1 \oplus t_2) = \phi_1(t_1) + \phi_2(t_2)$$

gdzie $t_i \in M_i \otimes N$ mamy

$$\begin{aligned} \eta(m_1 \oplus m_2, n) &= \eta_1(m_1, n) + \eta_2(m_2, n) = \phi_1(m_1 \otimes_1 n) + \phi_2(m_2 \otimes_2 n) \\ &= \phi((m_1 \otimes_1 n) \oplus (m_2 \otimes_2 n)) = \phi((m_1 \oplus m_2) \otimes n) \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość to definicja $\otimes$ z $M \times N$ w $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$. A więc dla $(M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ z powyżej zdefiniowanym $\otimes$ spełniona jest własność iloczynu tensorowego, czyli mamy izomorfizm z $M \otimes N$. Pozostałe izomorfizmy mają podobne dowody, więc je pominiemy. □

Lemat 1.2 *Jeśli $M = \oplus_\alpha M_\alpha$ to $M \otimes N$ jest izomorficzny z $\oplus_\alpha (M_\alpha \otimes N)$. Jeśli $N = \oplus_\alpha N_\alpha$ to $M \otimes N$ jest izomorficzny z $\oplus_\alpha (M \otimes N_\alpha)$.*

Dowód jest podobny do poprzedniego.

Lemat 1.3 *$M \otimes R$ jest izomorficzne z M. Podobnie $R \otimes M$ jest izomorficzne z M.*

Dowód. Operację $\otimes$ z $M \times R$ w M definiuję wzorem $m \otimes a = am$. Niech η będzie operacją dwuliniową z $M \times R$ w W i niech $\phi(m) = \eta(m, 1)$. Oczywiście ϕ jest operacją liniową. Mam

$$\eta(m, a) = \eta(am, 1) = \phi(am) = \phi(m \otimes a)$$

czyli jest spełniona własność iloczynu tensorowego. □

Lemat 1.4 *Jeśli M jest modułem wolnym z bazą $\{e_\alpha\}$ zaś N jest modułem wolnym z bazą $\{f_\beta\}$ to $M \otimes N$ jest modułem wolnym z bazą $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$*

Dowód: jest to bezpośredni wniosek z lematów 1.2 i 1.3. □

Wniosek: Jeśli R to ciało to $\dim(M \otimes N) = \dim(M)\dim(N)$.

Przykład: Jeśli $R = \mathbb{Z}$, zaś p i q to względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie to $R/(pR) \otimes R/(qR)$ to moduł zerowy. Mianowicie skoro p i q są względnie pierwsze to istnieją liczby całkowite a i b takie że $1 = ap + bq$. Teraz dla $u \otimes v \in R/(pR) \otimes R/(qR)$ mamy

$$u \otimes v = (ap + bq)(u \otimes v) = ap(u \otimes v) + bq(u \otimes v)$$

$$= a(pu \otimes v) + b(u \otimes qv).$$

Lecz $pu = 0$ w $R/(pR)$ i $qv = 0$ w $R/(qR)$ czyli powyższy element to 0. Jako że elementy postaci $u \otimes v$ generują $R/(pR) \otimes R/(qR)$ to produkt tensorowy jest zerowy.

Lemat 1.5 *Jeśli dla $i = 1, 2$ M_i, N_i są R-modułami, zaś $\phi_i : M_i \to N_i$ są homomorfizmami to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : (M_1 \otimes M_2) \to (N_1 \otimes N_2)$ taki że*

$$\phi(m_1 \otimes m_2) = \phi_1(m_1) \otimes \phi_2(m_2)$$

Dowód: $\phi_1(m_1) \otimes \phi_2(m_2)$ jest odwzorowaniem dwuliniowym z $M_1 \times M_2$ w $N_1 \otimes N_2$ a więc ϕ istnieje i jest jednoznaczne z własności definicyjnej iloczynu tensorowego $M_1 \otimes M_2$. □

W dalszym ciągu odwzorowanie ϕ wyżej będziemy oznaczać przez $\phi_1 \otimes \phi_2$.

Lemat 1.6 *Jeśli dla $i = 1, 2$ M_i, N_i, V_i są R-modułami, zaś $\phi_i : M_i \to N_i$ i $\psi_i : N_i \to V_i$ są homomorfizmami to*

$$(\psi_1 \otimes \psi_2)(\phi_1 \otimes \phi_2) = (\psi_1\phi_1) \otimes (\psi_2\phi_2)$$

Dowód: Bezpośrednie sprawdzenie z własności definicyjnej. □

Lemat 1.7 *Jeśli M_i, N_i wyżej są skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem k i $M_i = N_i$ to*

$$\mathrm{Tr}(\phi_1 \otimes \phi_2) = \mathrm{Tr}(\phi_1)\mathrm{Tr}(\phi_2)$$

Dowód. Niech $\{e_i\}$ będzie bazą M_1, $\{f_j\}$ bazą M_2 zaś $\{e_i^*\}$ i $\{f_j^*\}$ będą bazami dualnymi. Wtedy $\{e_i^* \otimes f_j^*\}$ jest bazą $M_1^* \otimes M_2^*$ dualną do $\{e_i \otimes f_j\}$. Mamy

$$\mathrm{Tr}(\phi_1 \otimes \phi_2) = \sum_{i,j} \langle (\phi_1 \otimes \phi_2)(e_i \otimes f_j), e_i^* \otimes f_j^* \rangle = \sum_{i,j} \langle (\phi_1(e_i) \otimes \phi_2(f_1), e_i^* \otimes f_j^* \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle \phi_1(e_i), e_i^* \rangle \langle \phi_2(f_j), f_j^* \rangle = \left(\sum_i \langle \phi_1(e_i), e_i^* \rangle \right) \left(\sum_j \langle \phi_2(f_j), f_j^* \rangle \right)$$

$$= \mathrm{Tr}(\phi_1)\mathrm{Tr}(\phi_2).$$

□

2 Produkt tensorowy reprezentacji

Jeśl R i S są algebrami nad k to na $R \otimes_k S$ (gdzie $\otimes_k$ oznacza że produkt tensorowy liczymy biorąc k jako pierścień) można wprowadzić strukturę pierścienia wzorem

$$(r_1 \otimes_k s_1)(r_2 \otimes_k s_2) = (r_1 r_2) \otimes_k (s_1 s_2)$$

Własność produktu tensorowego pozwala pokazać że tak określone mnożenie jednoznacznie rozszerza się na $R \otimes_k S$ i spełnia aksjomaty mnożenia w pierścieniu.

Lemat 2.1 *Jeśli G i H są grupami to $k[G] \otimes_k k[H]$ jest izomorficzne z $k[G \times H]$.*

Dowód: Elementy δ_g, $g \in G$ dają bazę $k[G]$, elementy δ_h, $h \in H$ dają bazę $k[H]$, zaś elementy δ_{gh}, $g \in G, h \in H$ dają bazę w $k[G \times H]$. Na mocy wcześniejszego lematu $\delta_g \otimes \delta_h$ daje bazę $k[G] \otimes_k k[H]$. A więc przyporządkowanie

$$\delta_g \otimes \delta_h \mapsto \delta_{gh}$$

daje izomorfizm $k[G] \otimes_k k[H]$ z $k[G \times H]$ jako przestrzeni liniowych. Trzeba sprawdzić że zachowuje się mnożenie. Lecz

$$(\delta_{g_1} \otimes \delta_{h_1})(\delta_{g_2} \otimes \delta_{h_2}) = \delta_{g_1 g_2} \otimes \delta_{h_1 h_2}$$

i w $G \times H$ mamy $(g_1 h_1)(g_2 h_2) = (g_1 g_2)(h_1 h_2)$ czyli faktycznie mnożenie jest zachowane. □

Jeśli M jest R-modułem zaś N jest S-modułem to na $M \otimes_k N$ mamy naturalną strukturę $R \otimes_k S$-modułu:

$$(r \otimes s)(m \otimes n) = rm \otimes sn.$$

Lemat 2.2 *Niech ciało k będzie algebraicznie domknięte, R będzie skończenie wymiarową algebrą nad k zaś M prostym R-modułem. Jeśli V jest niezerowym podmodułem w $M \oplus M$ to albo $V = M \oplus M$ albo $V = \{0\} \oplus M$ albo istnieje $a \in k$ takie że V to zbiór elementów postaci $v \oplus av$ gdzie $v \in M$.*

Dowód: Rozważmy rzut z V na pierwszy składnik sumy prostej. Jako że M jest modułem prostym to obraz to moduł zerowy albo całe M. Jeśli obraz to moduł zerowy to V jest zawarte w $\{0\} \oplus M$ które jest izomorfczne z M. Czyli V jako niezerowy podmoduł modułu prostego $\{0\} \oplus M$ jest równe $\{0\} \oplus M$. A więc pozostaje rozpatrzeć przypadek gdy obraz V przez rzut na pierwszy składnik sumy to M, czyli dla każdego $v_1 \in M$ istnieje $v_2 \in M$ takie że $v_1 \oplus v_2 \in V$. Przy ustalonym $v_1 \oplus v_2 \in V$ elementy $w \in M$ takie że $v_1 \oplus (w + v_2) \in V$ tworzą podmoduł H w M. Zauważmy że H nie zależy od v_1, bo $w \in H$ wtedy i tylko wtedy gdy $0 \oplus w \in V$. Jeśli H to całe M to $V = M \oplus M$. A więc pozostaje rozpatrzeć przypadek gdy H to moduł zerowy. Wtedy V jest wykresem odwzorowania liniowego z M w M. Na mocy lematu Schura takie odwzorowanie to mnożenie przez element $a \in k$ (to jest jedyne miejsce gdzie w tym lemacie używamy skończoność wymiaru M i algebraiczną domkniętość k). Czyli elementy V są postaci $v \oplus av$. □

Lemat 2.3 *Jeśli k jest algebraicznie domknięte, M jest prostym R-modułem który ma skończony wymiar nad k zaś N jest prostym S-modułem to $M \otimes_k N$ jest prostym $R \otimes_k S$-modułem.*

Dowód: Niech V będzie podmodułem $M \otimes_k N$. Ustalmy bazę $\{f_\alpha\}$ przestrzeni N nad k. Wtedy V zawiera element v postaci

$$\sum m_\alpha \otimes f_\alpha$$

Jesli wszystkie m_α są proporcjonalne nad k tzn. jeśli istnieje m i a_α takie że $m_\alpha = a_\alpha m$ to mogę napisać

$$v = \sum m_\alpha \otimes f_\alpha = \sum a_\alpha m \otimes f_\alpha = \sum m \otimes a_\alpha f_\alpha = m \otimes n$$

gdzie $n = \sum a_\alpha f_\alpha$. Jako że M i N są modułami prostymi to podmoduł nad R generowany przez m to całe M, podmoduł nad S generowany przez n to całe N czyli podmoduł nad $R \otimes_k S$ generowany przez $m \otimes n$ to całe $M \otimes_k N$. Jeśli istnieją α i β takie że m_α i m_β nie są proporcjonalne nad k to na mocy poprzedniego lematu podmoduł nad R generowany przez $m_\alpha \oplus m_\beta$ to $M \oplus M$ i w szczegolności zawiera element postaci $0 \oplus m$. Wtedy biorąc odpowiednią kombinację liniową v dostanę niezerowy element z mniejszą ilością składników w sumie. A więc indukcyjnie dostanę w V element postaci $m \otimes n$. □

Jeśli G jest grupą zaś M i N są $k[G]$ modułami to na $M \otimes_k N$ (gdzie $\otimes_k$ oznacza że produkt tensorowy liczymy biorąc k jako pierścień) można w naturalny sposób wprowadzić strukturę $k[G]$ modułu. Mianowicie niech $\lambda(g)$ oznacza operator mnożenia przez δ_g w M zaś $\eta(g)$ oznacza operator mnożenia przez δ_g w N. Wtedy przyporządkowanie

$$g \mapsto \lambda(g) \otimes \eta(g)$$

zadaje reprezentację G na $M \otimes_k N$, czyli zadaje strukturę $k[G]$-modułu.

Lemat 2.4 *Jeśli dla $i = 1, 2$ λ_i są reprezentacjami G nad k zaś χ_i są odpowiednimi charakterami to $\chi(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ jest charakterem dla $\lambda_1 \otimes \lambda_2$. Podobnie $\chi(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g)$ jest charakterem dla $\lambda_1 \oplus \lambda_2$.*

Dowód. Mamy

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}(\lambda_1 \otimes \lambda_2(g)) = \mathrm{Tr}(\lambda_1(g))\mathrm{Tr}(\lambda_2(g)) = \chi_1(g)\chi_2(g)$$

Dla sumy jest podobnie. $\square$

Z lematu wynika że charaktery tworzą półpierścień. Niekiedy wygodnie jest rozszerzyć ten półpierścień do pierścienia, tzn. rozpatrzeć moduł nad $\mathbb{Z}$ generowany przez charaktery modułów prostych z naturalnym mnożeniem.

Produkt tensorowy reprezentacji często jest rozkładalny. W szczególności w $M \otimes M$ podmoduł generowany przez elementy postaci $v \otimes v$ (oznaczany przez $S^2(M)$) jest niezmienniczy na działanie G. Podobnie $(M \otimes M)/S^2(M)$ (oznaczane przez $\Lambda^2(M)$) jest izomorficzne z podmodułem $(M \otimes M)$.

Bez dowodu podamy

Lemat 2.5 *Jeśli χ jest charakterem M, η jest charakterem $S^2(M)$ zaś ϕ jest charakterem $\Lambda^2(M)$ to*

$$\eta(g) = (\chi(g)^2 + \chi(g^2))/2$$

$$\phi(g) = (\chi(g)^2 - \chi(g^2))/2$$