1 Reprezentacje indukowane

Podamy teraz bardziej konkretną konstrukcję reprezentacji indukowanej w przypadku gdy podgrupa S grupy G jest skończona. Niech M będzie $k[S]$ modułem czyli reprezentacją S. Niech H będzie przestrzenią funkcji na G o wartościach w M takich że przyjmują tylko skończenie wiele niezerowych wartości zaś V będzie podprzestrzenią H funkcji spełniających warunek

$$v(gs^{-1}) = \delta_s v(g)$$

gdzie mnożenie przez δ_s to działanie reprezentacji. Można sprawdzić że V jest podprzestrzenią dopełniczą do I gdzie I jest podprzestrznią H generowaną przez elementy postaci

$$v(gs^{-1}) - \delta_s v(g).$$

(tu istotne jest że S jest skończone). Zauważmy teraz że H jest izomorficzne z $k[G] \otimes_k M$ zaś I jest podmodułem z konstrukcji iloczynu tensorowego. Dokładniej, w $k[G]$ mamy

$$\delta_g \delta_s = \delta_{gs}$$

co daje

$$(v\delta_s)(g) = v(gs^{-1})$$

A więc rzeczywiście I to podprzestrzeń z definicji iloczynu tensorowego. Teraz V jest izomorficzne z H/I, czyli faktycznie V daje nam iloczyn tensorowy $K[G] \otimes_{k[S]} M$. Podobnie jak dla I sprawdzamy że

$$(\delta_g v)(h) = v(g^{-1}h)$$

co daje jawnie działanie G w przestrzeni reprezentacji indukowanej.

Druga konstrukcja reprezentacji indukowanej pozwala pokazać że ma ona dodatkową własność. Mianowicie, rozważmy podział G na warstwy lewostronne względem podgrupy S. Przestrzeń warstw oznaczamy przez G/S. Wtedy jeśli $\sigma_1, \sigma_2 \in G/S$, przy ustalonym $g \in G$ dla pewnego $u \in \sigma_1$ mamy $gu \in \sigma_2$ to dla dowolnego $u \in \sigma_1$ mamy $gu \in \sigma_2$. A więc biorąc jako V_σ podprzestrzeń V składającą się z funkcji które są zerem poza warstwą σ mamy $\delta(g)V_{\sigma_1} = V_{\sigma_2}$. Innymi słowy G permutuje przestrzenie V_σ. Ponadto

$$V = \oplus_\sigma V_\sigma.$$

Dodatkowo, warunek nałożony na V oznacza że reprezentacja S w przestrzeni V_e jest równoważna z wyjściową reprezentacją M.

Lemat 1.1 *Niech będzie dana reprezentacja λ grupy G na W, $W = \oplus_\sigma W_\sigma$ i G tranzytywnie permutuje przestrzenie W_σ. Ustalmy pewne σ_0 i niech*

$$S = \{g \in G : \delta_g W_{\sigma_0} = W_{\sigma_0}\}.$$

Wtedy reprezentacja na W jest izomorficzna z reprezentacją indukowaną z reprezentacji S na W_{σ_0}.

Dowód. Zauważmy że ponieważ G tranzytywnie permutuje przestrzenie W_σ to zbiór σ można utożsamić ze zbiorem warstw lewostronnych G/S. Oznaczmy przez η działanie reprezentacji indukowanej na V. Zdefininujemy odwzorowanie liniowe ϕ z W do V. Robimy to dla każdej podprzestrzeni W_σ z osobna. Niech $u \in \sigma$. Bierzemy

$$\phi(x) = \eta(u)\lambda(u^{-1})x$$

dla $x \in W_\sigma$. Ten wzór ma sens bo $\lambda(u^{-1})x \in W_e = V_e$. Widać że $\phi(x) \in V_\sigma$. Jeśli us jest innym elementem σ to

$$\eta(us)\lambda((us)^{-1}) = \eta(u)\eta(s)\lambda(s^{-1})\lambda(u^{-1})$$

Lecz na $W_e = V_e$ dla $s \in S$ działania η i λ są równe, czyli $\eta(s)\lambda(s^{-1})$ to identyczność i wartość ϕ nie zależy od wyboru u. Jeśli $g \in G$ to biorąc gu jako reprezentant $g\sigma$ mam

$$\begin{aligned}\phi(\lambda(g)x) &= \eta(gu)\lambda((gu)^{-1})\lambda(g)x = \eta(g)\eta(u)\lambda(u^{-1})\lambda(g^{-1})\lambda(g)x \\ &= \eta(g)\eta(u)\lambda(u^{-1})x = \eta(g)\phi(x)\end{aligned}$$

czyli ϕ zadaje homomorfizm reprezentacji (operator splatający). Lecz z określenia widać że ϕ na każdym W_σ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych czyli skoro W i V są sumami prostymi to ϕ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych. czyli jest izomorfizmem (równoważnością) reprezentacji. □

Lemat 1.2 *Jeśli R jest zbiorem reprezentantów G/S, χ jest charakterem reprezentacji S na M rozszerzonym przez 0 na G, zaś η jest charakterem reprezentacji indukowanej to*

$$\eta(g) = \sum_{r\in R}\chi(r^{-1}gr) = \frac{1}{|S|}\sum_{u\in G}\chi(u^{-1}gu)$$

Dowód: Niech $V = \oplus\delta_r M$ będzie przestrzenią reprezentacji indukowanej. Zauważmy że albo $\delta_g\delta_r M = \delta_r M$ albo $\delta_g\delta_r M \cap \delta_r M = \{0\}$. W drugim przypadku podprzestrzeń $\delta_r M$ daje zerowy wkład do śladu. W pierwszym mamy

$$\mathrm{Tr}(\delta_g)|_{\delta_r M} = \mathrm{Tr}(\delta_{r^{-1}}\delta_g\delta_r)|_M = \mathrm{Tr}(\delta_{r^{-1}gr})|_M = \chi(r^{-1}gr).$$

Przy tym w pierwszym przypadku $r^{-1}gr \in S$, w drugim $r^{-1}gr \notin S$, czyli $\chi(r^{-1}gr) = 0$. A więc

$$\eta(g) = \mathrm{Tr}(\delta_g) = \sum_{r:r^{-1}gr\in S}\mathrm{Tr}(\delta_g)|_{\delta_r M} = \sum_{r:r^{-1}gr\in S}\chi(r^{-1}gr) = \sum_r \chi(r^{-1}gr)$$

co daje pierwszą równość. Druga wynika z pierwszej zapisując elementy $u \in G$ w postaci $u = rs$ i sumując najpierw po s:

$$\sum_u \chi(u^{-1}gu) = \sum_r\sum_s \chi(s^{-1}r^{-1}grs) = \sum_r\sum_s \chi(r^{-1}gr) = |S|\sum_r \chi(r^{-1}gr).$$

□