1 Reprezentacje indukowane

Funkcję ϕ na G nazywamy centralną jeśli dla dowolnego $u \in G$ mamy $\phi(g) = \phi(u^{-1}gu)$. Jak pokazaliśmy wcześniej charaktery są funkcjami centralnymi.

Niech S będzie podgrupą grupy skończonej G. Dla funkcji centalnej ϕ na S oznaczymy przez $\mathrm{Ind}(\phi)$ (lub $\mathrm{Ind}_S^G(\phi)$ jeśli trzeba zaznaczyć grupy) funkcję zadaną wzorem

$$\mathrm{Ind}(\phi)(g) = \sum_{r \in R} \chi(r^{-1}gr) = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in G} \chi(s^{-1}gs)$$

gdzie R jest zbiorem reprezentantów dla G/S. Jako że ϕ jest funkcją centralną $\chi(r^{-1}gr)$ nie zależy od wyboru reprezentanta r dla warstwy lewostronnej, czyli $\mathrm{Ind}(\phi)$ jest dobrze zdefiniowane. Ponadto $\mathrm{Ind}(\phi)$ jest funkcją centralną: dla $u \in G$ zbiór $\{ur : r \in R\}$ jest też zbiorem reprezentatów dla warstw, więc

$$\mathrm{Ind}(\phi)(u^{-1}gu) = \sum_{r \in R} \chi(r^{-1}u^{-1}gur) = \sum_{r \in R} \chi((ur)^{-1}g(ur))$$

$$= \sum_{r \in R} \chi(r^{-1}gr) = \mathrm{Ind}(\phi)(g).$$

Definiujemy również operację Res która jest ograniczeniem funkcji z G do S, tzn. dla ϕ będącego funkcją na G funkcja $\mathrm{Res}(\phi)$ jest funkcją na S i dla $s \in S$ mamy $\phi(s) = \mathrm{Res}(\phi)$.

Lemat 1.1 *(Prawo wzajemności Frobeniusa) Jeśli ψ jest funkcją centralną na S zaś ϕ jest funkcją centralną na G to*

$$\langle \psi, \mathrm{Res}(\phi) \rangle = \langle \mathrm{Ind}(\psi), \phi \rangle$$

Oznaczny przez $R(G)$ pierścień z mnożeniem punktowym generowany przez charaktery. Elementy $R(G)$ nazywamy charakterami wirtualnymi.

Lemat 1.2 *(Twierdzenia Artina) Każdy element $\phi \in R(G)$ jest wymierną kombinacją liniową charakterów indukowanych z podgrup cyklicznych. Dokładniej, $|G|\phi$ jest całkowitą kombinacją liniową charakterów indukowanych z podgrup cyklicznych.*

Dowód: Pokażemy to w kilku krokach.

Krok 1: Wystarczy pokazać wynik dla charakteru trywialnego. Mianowicie, zakładając że

$$|G|1 = \sum k_i \mathrm{Ind}(\chi_i)$$

mamy

$$|G|\psi = |G| \cdot 1 \cdot \psi = \sum k_i \psi \mathrm{Ind}(\chi_i) = \sum k_i \mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(\psi)\chi_i))$$

$\mathrm{Res}(\psi)\chi_i$ jako produkt charakterów jest charakterem. Charaktery grupy cyklicznej można przedstawić jako sumę charakterów jednowymiarowych, czyli

$$\mathrm{Res}(\psi)\chi_i = \sum_j l_j \chi_j$$

co oznacza że ψ jest sumą charakterów indukowanych z charakterów podgrup cyklicznych. A więc wystarczy pokazać że $|G|$ jest całkowitoliczbową kombinacją liniową charakterów indukowanych z charakterów podgrup cyklicznych.

Krok 2. Niech $g \in G$. Niech C będzie grupę cykliczną generowaną przez g. Niech $\alpha_C(u) = 1$ dla u będących generatorem C i $\alpha_C(u) = 0$ poza tym. Niech N_C będzie normalizatorem C, tzn. $N_C = \{s \in G : s^{-1}Cs \subset C\}$. Dla $s \notin N_C$ mamy $s^{-1}gs \notin C$ czyli $\alpha_C(s^{-1}gs) = 0$, zaś dla $s \in N_C$ element $s^{-1}gs$ jest generatorem C, czyli $\alpha_C(s^{-1}gs) = 1$. A więc

$$\mathrm{Ind}(\alpha_C)(g) = \frac{1}{|C|}\sum_{s\in G}\alpha_C(s^{-1}gs) = \frac{1}{|C_g|}\sum_{s\in N_g}\alpha_C(s^{-1}gs) = \frac{|N_C|}{|C|}$$

czyli dla u w sprzężonych z generatorem C mamy

$$\frac{|G||C|}{|N_C|}\mathrm{Ind}(\alpha_C)(u) = |G|$$

zaś dla pozostałych u mamy $\mathrm{Ind}(\alpha_C)(u) = 0$. Niech U będzie zbiorem reprezentantów klas sprzężoności podgrup cyklicznych G. Wtedy dla każdego $u \in G$

$$\sum_{C\in U}\frac{|G||C|}{|N_C|}\mathrm{Ind}(\alpha_C)(u) = |G|.$$

Mianowicie, u generuje dokładnie jedną podgrupę cykliczną i ta podgrupa jest sprzężona z dokładnie jednym elementem U, a więc przy ustalonym u w sumie wyżej dokładnie jeden składnik jest niezerowy. Oczywiście $|G||C|/|N_C|$ jest liczbą całkowitą.

Krok 3. Na mocy poprzedniego kroku wystarczy pokazać że α_C jest kombinacją liniową z całkowitoliczbowymi współczynnikami charakterów podgrup (siłą rzeczy cyklicznych) C. Jeśli $|C| = l$ i l można zapisać jako produkt $l = km$ z względnie pierwszymi k i m, to $C = C_1 \times C_2$ jest produktem grup, $C_1 = k$, $C_2 = m$. Mamy $\alpha_C = \tilde{\alpha}_{C_1}\tilde{\alpha}_{C_2}$ gdzie $\tilde{\alpha}_{C_i}$ jest rozszerzeniem α_{C_i} na produkt zgodnie ze wzorem $\tilde{\alpha}_{C_i}(g_1, g_2) = \alpha_{C_i}(g_i)$. W podobny sposów można rozszerzać charaktery. Indukcyjnie możemy zakładać że wynik jest prawdziwy dla mniejszych grup cyklicznych, czyli że zachodzi dla C_i. Wtedy α_{C_i} jest kombinacją charakterów, rozszerzenie charakterów do produktu oznacza że również $\tilde{\alpha}_{C_i}$ jest kombinacją charakterów i w końcu α_C jako produkt jest kombinacją charakterów.

Krok 4. Teraz wystarcza rozważać C z mocą postaci p^k gdzie p jest liczbą pierwszą. Elementy C nie będące generatorami tworzą podgrupę H mocy p^{k-1}. A więc α_C jest różnicą charakteru trywialnego C i charakteru trywialnego H.

□

Komentarz: Powyżej wystarczy wziąść tylko maksymalne podgrupy cykliczne. Ponadto wystarczy wziąść tylko jeden reprezentant w klasie sprzężoności podgrup cyklicznych. Dla grupy $SL(2, q)$ oznacza to że wystarczą trzy albo cztery podgrupy: podgrupa macierzy diagonalnych, podgrupa mocy $q + 1$ składająca się z macierzy diagonalizujących się nad $F(q^2)$ i jedna lub dwie podgrupy generowane przez elementy typu $-N$ (jeśli każdy element $F(p)$ jest kwadratem w $F(q)$ to potrzebne są dwie podgrupy, w przeciwnym razie wystarcza jedna). Bezpośredni rachunek pokazuje że faktycznie wystarczy jedna podgrupa typu $-N$. Przy tym dla q będącego potęgą otrzymuje się wielokrotności charakterów indukowanych z $\tilde{N}$. Jako że charaktery odpowiednich reprezentacji nieprzywiedlnych nie pojawiają się w innych reprezentacjach to widać że potrzeba dzielenia by otrzymać wszystkie charaktery. Patrząc na charaktery indukowane z podgrupy mocy $q+1$ widać że potrzebne jest odejmowanie by otrzymać charaktery nieprzywiedlne.

Lemat 1.3 *Charaktery grupy $S(n)$ permutacji zbioru n-elementowego przyjmują wartości całkowite wymierne.*

Dowód: Charaktery przyjmują wartości będące całkowitymi liczbami algebraicznymi. A więc trzeba pokazać że wartości są wymierne (całkowita liczba algebraiczna która jest wymierna jest liczbą całkowitą). Na mocy twierdzenia Artina wystarczy pokazać że charaktery indukowane z podgrup cyklicznych są wymierne. Pokażemy to w kilku krokach.

Krok 1. Jeśli g jest generatorem podgrupy cyklicznej i ma więcej niż jeden cykl w rozkładzie na cykle rozłączne możemy użyć indukcję etapami. Mianowicie rozważamy podgrupę $S(n)$ która zachowuje cykle g jako zbiory. Ta podgrupa jest produktem grup G_c permutacji elementów cyklu c. Robiąc indukcję etapami widać że wystarczy pokazać wynik dla G_c, czyli można zakładać że g jest pojedynczym cyklem.

Krok 2. Jeśli generator g jest cyklem długości l którą można zapisać jako produkt $l = km$ z względnie pierwszymi k i m to g można potraktować jako permutacją produktu zbiorów k elementowego i m elementowego, tak że g działa po składowych jako cykl długości k i cykl długości m. Znowu robimy indukcję etapami, najpierw w produkcie grup permutacji zbioru k elementowego i m elementowego, a potem do permutacji zbioru l elementowego. Indukcja w produkcie daje produkt charakterów, więc to sprowadza problem do cyklu który jest potęgą liczby pierwszej.

Krok 3. Niech cykl g długości p^k gdzie p jest liczbą pierwszą będzie generatorem podgrupy cyklicznej C. Elementy C które nie są generatorami tworzą podgrupę H mocy p^{k-1}. Jeśli $h \in H$ i $u^{-1}hu \in C$ to $u^{-1}hu$ nie jest generatorm C, czyli $u^{-1}hu \in H$. Ponadto obcięcie charakteru C do H jest charakterem H. A ze wzoru na charakter indukowany wynika że charakter indukowany na klasie h z H będzie wielokrotnością charakteru indukowanego z C. Czyli przez indukcję po k wystarczy pokazać że charakter indukowany na klasie generatora jest wymierny.

Krok 4. Niech g będzię generatorm podgrupy cyklicznej C mocy p^k zaś χ będzie charakterem C. $u^{-1}gu \in C$ oznacza że $u^{-1}gu$ jest generatorem C. Z wzoru na charakter indukowany wynika że charkter indukowany jest wielokrotnością sumy wartości χ na generatorach. Zauważmy że suma wartości χ po całym C jest wymierna bo jeśli χ jest charakterem trywialnym to jest to liczba całkowita, jeśli χ jest nietrywialny jest to wielokrotność sumy pierwiastków z 1 która wynosi 0. Suma wartości χ na generatorach to różnica sumy wartości χ na C i sumy wartości χ na elementach nie będących generatorami. Ale elementy nie będące generatorami tworzą podgrupę H, χ obciete do H jest charakterm H, czyli suma po H jest wymierna. $\square$

Niech p będzie liczbą pierwszą. Mówimy że element $g \in G$ jest p-elementem jeśli rząd g jest potęgą p. Mówimy że g jest p-regularny jeśli rząd p jest względnie pierwszy z p.

Mówimy że podgrupa grupy G jest p-elementarna jeśli jest produktem grupy cyklczniej rzędu względnie pierwszego z p i podgrupy rzędu będącego potegą p (p-podgrupy).

Uwaga: p-podgrupa może być nieprzemienna. Jednakże z definicji produktu grup elementy grupy cyklicznej i p-podgrupy muszą komutować w podgrupie p-elementarnej.

Lemat 1.4 *(Twierdzenia Brauera) Każdy element $R(G)$ jest kombinacją liniową z całkowitymi współczynnikami charakterów jednowymiarowych podgrup p-elementarnych (z dowolnym p).*

Uwaga: Istnieją nieprzemienne p-grupy. Takie grupy muszą mieć reprezentacje nieprzywiedlne wymiaru większego niż 1, a więc w twierdzeniu Brauera trzeba uwzględniać charaktery podgrup. Innymi słowy, w przeciwieństwie do twierdzenia Artina nie można się ograniczyc do maksymalnych podgrup p-elementarnych.

Uwaga: W praktyce przy wyznaczaniu klas sprzężoności elementów również można wyliczyć komutant (a przynajmniej jego moc). Często podgrupy p-elementarne są małymi rozszerzeniami podgrup cyklicznych i łatwo je wyliczyć. Wtedy stosowanie twierdzenia Brauera wymaga podobnego wysiłku jak twiedzenie Artina a daje mocniejszy wynik. Ale czasami p-podgrupy są duże i skomplikowane.

Dla grupy $SL(2,q)$ z opisu komutantów elementów widać że jeśli składnik cykliczny zawiera nietrywialną klasę sprzężoności to cała podgrupa p-elementarna będzie albo cykliczna albo będzie podgrupą $\tilde{N}$. Widać że wymienione podgrupy są p-elementarne. Dla nieparzystego q moc $SL(2,q)$ jest podzielna przez 8, a więc $SL(2,q)$ zawiera nieprzemienną 2-podgrupę.

Jeśli dla każdego $g \in G$ mamy równość $g^m = e$ i m jest najmniejszą liczbą całkowitą o tej własności to m nazywamy wykładnikiem G.

Lemat 1.5 *Niech m będzie wykładnikiem G i ciało k charakterystyki 0 zawiera pierwiastek pierwotny stopnia m z 1. Dowolną reprezentację G można zrealizować nad k.*

Dowód. Charaktery grupy G przyjmują wartości w k. Jeśli K jest większym ciałem, W jest $K[G]$ modułem to oznaczmy przez ψ charakter W. Na mocy twierdzenia Brauera

$$\psi = \sum n_j \mathrm{Ind}(\phi_j)$$

gdzie ϕ_j są jednowymiarowymi charakterami podgrup p-elementarnych. Moduł N_j odpowiadający charakterowi jednowymiarowemu ϕ_i oczywiście można zrealizować nad k. Oznaczmy przez $\mathrm{Ind}(N_j)$ moduł indukowanym z N_j. Oczywiście również $\mathrm{Ind}(N_j)$ można zrealizować nad k. A więc $\mathrm{Ind}(N_j)$ jest sumą prostą kopii $k[G]$-modułów prostych M_i. Niech χ_i będzie charakterem M_i. Istnieją liczby całkowite $k_{j,i}$ takie że

$$\mathrm{Ind}(\phi_j) = \sum_i k_{j,i}\chi_i.$$

Wtedy

$$\psi = \sum_j n_j(\sum_i k_{j,i}\chi_i) = \sum_i(\sum_j n_j k_{j,i})\chi_i$$

Z rozkładu kanonicznego wynika że suma $|G|$ kopii W jest sumą prostą M_i, czyli $|G|\psi$ jest kombinacją liniową χ_i o wspólczynnikach będących nieujemnymi liczbami całkowitymi. Lecz χ_i są liniowo niezależnie nad $\mathbb{Q}$ więc przedstawienie ψ jako kombinacji liniowej χ_i jest jednoznaczne, więc $c_i = \sum_j n_j k_{j,i}$ są liczbami dodatnimi. Jako sumy liczb całkowitych są całkowite. A więc W jest izomorficzne z rozszerzeniem skalarów

$$\oplus_i \oplus_1^{c_i} M_i$$

czyli M można zrealizować nad k. $\square$