1 Reprezentacje charakterystyki skończonej

W przypadku gdy charakterystyka p ciała nie dzieli mocy grupy i ciało jest dostatecznie duże teoria w charakterystyce p jest izomorficzna z teorią w charakterystyce 0. Dokładniej, niech m będzie wykładnikiem G, tzn. taką najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią że dla każdego $g \in G$ mamy $g^m = e$. Pokazaliśmy że wtedy każda reprezentacja grupy G daje się zrealizować nad ciałem $K = \mathbb{Q}(e_m)$ gdzie e_m jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia m z 1. Niech A będzie podpierścieniem w K składajacym się z elementów całkowitych nad $\mathbb{Z}$ i niech $\mathbf{m}$ będzie ideałem maksymalnym w A zawierającym p. Wtedy pierścień ilorazowy $A/\mathbf{m}$ jest ciałem F charakterystyki p zawierającym pierwiastek pierwotny stopnia e_m z 1.

Niech B będzie podpierścieniem K składającym się z elementów które można zapisać jako ułamek z mianownikiem nie należącym do $\mathbf{m}$. Redukacja modulo $\mathbf{m}$ jest dobrze zdefiniowana na B (jest to największy podpierścień K na którym redukcja modulo $\mathbf{m}$ jest dobrze zdefiniowana). B jest tak zwanym pierścieniem lokalnym. Co istotniejsze B jest pierścieniem ideałów głównych.

Lemat 1.1 *Niech k będzie ciałem zaś R będzie pierścieniem takim że k jest ciałem ułamków R. Niech ρ będzie reprezentacją grupy skończonej G na skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad k. Wtedy V zawiera skończenie generowalny R moduł W który generuje V nad k.*

Dowód: Niech B będzie bazą V. B jest zbiorem skończonym. Definiujemy S wzorem

$$S = \bigcup_{g \in G} \rho(B).$$

Jako że G jest skończona to również S jest zbiorem skończonym. Jako W bierzemy podmoduł V traktowanego jako R-moduł generowany przez S. Oczywiście W jest skończnie generowalny. Jako że W zawiera B to W generuje V nad k. $\square$

Bez dowodu przypomnijmy znany fakt z algebry:

Lemat 1.2 *Niech R będzie pierścieniem ideałów głównych zaś k ciałem ułamków R. Każdy podmoduł modułu wolnego nad R jest modułem wolnym. Jeśli W jest skończenie generowalnym modułem beztorsyjnym nad R (np. W jest podmodułem przestrzeni wektorowej nad k) to W jest modułem wolnym. Jeśli W_1 i W_2 są skończenie generowanymi podmodułami nad R przestrzeni wektorowej V nad k takimi że $kW_i = V$ to istnieją elementy $a \in K$, $b \in R$ takie ze $abW_1 \subset W_2 \subset aW_1$.*

Pierścień A zdefiniowany wyżej zwykle nie jest pierścieniem ideałów głównych. Jednakże łatwo można to poprawić używając większy pierścień. Niech B będzie podpierścieniem K składającym się z elementów które można zapisać jako ułamek z mianownikiem nie należącym do $\mathbf{m}$. Redukacja modulo $B\mathbf{m}$ jest dobrze zdefiniowana na B (jest to największy podpierścień K na którym redukcja modulo $\mathbf{m}$ jest dobrze zdefiniowana). B jest tak zwanym pierścieniem lokalnym. Co istotniejsze B jest pierścieniem ideałów głównych. Przy tym w B istnieje jedyny z dokładnością do stowarzyszenia (czyli mnożenia przez elementy odwracalne w B) element pierwszy π taki że $B\mathbf{m} = B\pi$. Przy tym każdy element $b \in B$ można zapisać jednoznacznie jako $b = u\pi^l$ gdzie $l \geq 0$, $l \in \mathbb{Z}$, zaś u jest elementem odwracalnym w B.

Lemat 1.3 *Niech M będzie skończenie generowalnym $K[G]$ modułem gdzie G jest grupą skończoną zaś p, K, B i F jest jak wyżej. Zakładamy że p nie dzieli mocy G. W M wybieramy $B[G]$-podmoduł E który generuje M jako przestrzeń wektorową nad K. Niech $\tilde{E}$ będzie $F[G]$-modułem otrzymanym przez redukcję modulo $B\mathbf{m}$. Klasa izomorfizmu $\tilde{E}$ nie zależy od wyboru E spełniającego warunki wyżej.*

Dowód: Niech E_1 i E_2 będą dwoma różnymi wyborami dla E. Zauważmy najpierw że jeśli $a \in K$ zaś $E_1 = aE_2$ to E_1 i E_2 są izomorficzne jako $B[G]$ moduły więc redukcja też daje izomorficzne moduły. Ogólnie na mocy lematu 1.2 istnieją $a \in K$ i $b \in B$ takie że $abE_1 \subset E_2 \subset aE_1$. Bazując na już udowodnionej części można zakładać że $a = 1$, czyli $bE_1 \subset E_2 \subset E_1$. Zapiszmy $b = u\pi^l$ gdzie u jest odwracalne w B. Jako że u jest odwracalny mamy $bE_1 = u\pi^l E_1 = \pi^l E_1$, więc wystarcza rozważać przypadek gdy $\pi^l E_1 \subset E_2 \subset E_1$. Najpierw rozważmy przypadek gdy $\pi E_1 \subset E_2 \subset E_1$. Niech $T = E_1/E_2$. Jako że $\pi E_1 \subset E_2$, to $B[G]$-moduł T można traktować jako $F[G]$ moduł. Mamy też ciąg dokładny $F[G]$ modułów:

$$0 \to \pi T \to \tilde{E}_2 \to \tilde{E}_1 \to T \to 0$$

gdzie odwzorowania (strzałki) są zadane przez inkluzje $B[G]$ modułów. Ale każdy $F[G]$ moduł jest sumą prostą modułów prostych, przy tym składniki proste są wyznaczone jednoznacznie. A więc ciąg dokładny wyżej prowadzi do izomorfizmów

$$\mathrm{Im}(\tilde{E}_2) \oplus T \approx \tilde{E}_1, \quad T \oplus \mathrm{Im}(\tilde{E}_2) \approx \tilde{E}_2,$$

gdzie $\mathrm{Im}(\tilde{E}_2)$ oznacza obraz $\tilde{E}_2$ i konsekwentnie $\tilde{E}_1$ jest izomorficzne z $\tilde{E}_2$ co daje wynik w przypadku gdy $\pi E_1 \subset E_2 \subset E_1$.

Wynik w przypadku $\pi^l E_1 \subset E_2 \subset E_1$ pokażemy przez indukcję ze względu na l. Pokazaliśmy już wynik dla $l = 1$, więc trzeba jeszcze pokazać wynik dla $l + 1$. Czyli zakładamy że $\pi^{l+1} E_1 \subset E_2 \subset E_1$. Niech $E_3 = E_2 + p^l E_1$. Mamy $p^l E_1 \subset E_3 \subset E_1$, czyli z założenia indukcyjnego $\tilde{E}_3$ jest izomorficzne z $\tilde{E}_1$. Mamy też $\pi E_3 = \pi E_2 + \pi^{l+1} E_1$. Jako że $\pi^{l+1} E_1 \subset E_2$ to $\pi E_3 \subset E_2 \subset E_3$. Na mocy przypadku $l = 1$ moduł $\tilde{E}_2$ jest izomorficzny z $\tilde{E}_3$. Ale $\tilde{E}_3$ jest izomorficzny z $\tilde{E}_1$, czyli $\tilde{E}_2$ jest izomorficzny z $\tilde{E}_1$. □

Uwaga: Wynik powyższego lematu zachodzi dla ogólniejszych ciał K. Po zamianie sformułowania pozostaje on prawdziwy dla dowolnych p. Dokładniej, dla danych E_1 i E_2 istnieje $F[G]$-moduł N taki że $\tilde{E}_1 \oplus N$ jest izomorficzne z $\tilde{E}_2 \oplus N$.

Lemat 1.4 *Niech M będzie $K[G]$ modułem prostym zaś K, B, G, p i E będą jak w poprzednim lemacie. Wtedy $\tilde{E}$ jest $F[G]$ modułem prostym.*

Dowód: Jeśli M ma nad K wymiar l to $\tilde{E}$ ma wymiar l nad F. M występuje z krotnością l w $K[G]$, więc $\tilde{E}$ też występuję z krotnością l w $F[G]$. Mianowicie, używając δ_g, z $g \in G$ jako bazę B-modułu redukcja $K[G]$ daje $F[G]$. Ale na mocy lematu 1.3 inne B-moduły generujące $K[G]$ nad K dają izomorficzną redukcję. W szczególności można rozłożyć $K[G]$ na $K[G]$-moduły proste i w każdym z modułów prostych M_i wybrać $B[G]$ moduł E_i generujący M_i nad K. Suma prosta kopii E_i daje $B[G]$-moduł zawarty w $K[G]$ i generujący $K[G]$ nad K. Widać że redukcja sumy prostej daje sumę prostą, czyli $\tilde{E}$ pojawi się w redukcji z krotnością l.

Skoro $\tilde{E}$ występuje w $F[G]$ z krotnością l to składniki nieprzywiedlne $\tilde{E}$ występują w $F[G]$ z krotnością co najmniej l. A więc na mocy twierdzenia Wedderburna dowolny niezerowy składnik nieprzywiedlny $\tilde{E}$ musi mieć wymiar co najmniej l. Jako że $\tilde{E}$ ma wymiar l oznacza to że $\tilde{E}$ jest modułem prostym. □

Lemat 1.5 *Redukcja modulo* **m** *zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych G nad K i charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych G nad F.*

Dowód: Licząc ślad w bazie odpowiedniego modułu widać że redukcja charakteru jest charakterem redukcji modułu. Czyli wynik jest prostym wnioskiem z Lematu 1.4 □

2 Dodatek, kótko o grupach krystalograficznych

Idealny kryształ to periodyczna kolekcja atomów. Interesują nas symetrie kryształu. Fizycznie najważniejsze są kryształy w przestrzeni trójwymiarowej. Matematycznie możemy rozważać dowolne $\mathbb{R}^n$ jako przestrzeń. Z definicji symetriami są przesunięcia o okresy co daje $\mathbb{Z}^n$ jako podgrupę grupy symetrii G. Jest to podgrupa normalna. Iloraz H grupy G przez $\mathbb{Z}^n$ jest grupą skończoną. Działanie G na $\mathbb{Z}^n$ przez automorfizmy wewnętrzne daje reprezentację H na $\mathbb{Z}^n$. Przy tym jest to reprezentacja wierna, bo przekształcenie afiniczne komutujące z przesunięciami jest samo przesunięciem.

Pierwszym krokiem do wyznaczenia możliwych grup symetrii jest wyznaczenie grup skończonych które mają wierną reprezentacje na $\mathbb{Z}^n$.

Tradycyjne podejście dla $\mathbb{R}^3$ wyglądało następująco:

- wyznaczenie grup mających reprezentacje na $\mathbb{R}^3$

- sprawdzenie które z nich mają reprezentacje na $\mathbb{Z}^3$
- wyznaczenie klas równoważności reprezentacji na $\mathbb{Z}^3$

Znając reprezentacje pozostawało wyznaczyć możliwe struktury G, co we współczesym języku sprowadza się do policzenia odpowiednich grup homologii H.

Wyniki tej analizy są dość długie i dostępne w książkach, nie będziemy ich tu powtarzać.

Jest prosta sztuczka która pozwala uzyskać istotną informację o grupie H. Mianowicie H zachowuje $2\mathbb{Z}^n$ co prowadzi do reprezentacji H nad Z_2 (można też wziąść inną liczbę pierwszą). Jądro tego homomorfizmu jest grupą rozwiązalną. Dla $n = 3$ obraz to podgrupa grupy $SL(3,2)$. Grupa $SL(3,2)$ jest grupą prostą – można pokazać że jest izomorficzna z ilorazem grupy $SL(2,7)$ przez centrum. Jednak obraz H musi być właściwą podgrupą $SL(3,2)$ która jest rozwiązalna. Taki argument pozwala to pokazać że dla $\mathbb{Z}^3$ całe H jest rozwiązalne.