Compressed sensing – basis pursuit

Krzysztof Bazner

Uniwersytet Wrocławski

14 maja 2019

Spis treści

Wstęp

Rozważamy rozwiązania układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A = (A_1|A_2|\dots|A_p) \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, taka że $\mathrm{lin}(A) = \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ oraz $p > n$.

Sparsest solution i basis pursuit solution

Rozwiązanie sparsest to rozwiązanie problemu

$$\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}^p} \|x\|_0 \text{ pod warunkiem } Ax = b.$$

Zbiór tych rozwiązań oznaczmy przez S_0. Ponieważ minimalizacja "normy" ℓ^0 jest NP–trudna, to wybiera się inne metody rozwiązywania problemu compressive sensing. My skupimy się na strategii basis pursuit, czyli rozwiązania problemu

$$\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}^p} \|x\|_1 \text{ pod warunkiem } Ax = b$$

Poprzez S_1 będzimy rozumieli zbiór rozwiązań basis pursuit.

Charakterystyka rozwiązań basis pursuit

Niech x^* będzie rozwiązaniem $Ax = b$. Wprowadźmy oznaczenie $\mathrm{supp}(x^*) := \{i \in \{1, 2, \ldots, p\} : x_i^* \neq 0\}$. Wtedy

i) $x^* \in S_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall h \in \ker(A)) \quad \left| \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} h_i \,\mathrm{sgn}(x_i^*) \right| \leqslant \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} |h_i|$$

ii) $S_1 = \{x^*\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall h \in \ker(A) \setminus \{0\}) \quad \left| \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} h_i \,\mathrm{sgn}(x_i^*) \right| < \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} |h_i|$$

Własność przestrzeni pustej

Null space property

Niech x^* będzie rozwiązaniem $Ax = b$. Wtedy

i) $x^* \in S_1$ jeśli

$$(\forall h \in \ker(A)) \ \left| \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} h_i \right| \leqslant \|h\|_1 / 2$$

ii) $S_1 = \{x^*\}$ jeśli

$$(\forall h \in \ker(A) \setminus \{0\}) \ \left| \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} h_i \right| < \|h\|_1 / 2$$

Irrepresentable condition

Niech $x^* \in \mathbb{R}^p$ będzie pewnym rozwiązaniem $Ax = b$. Wprowadźmy oznaczenie $I := \operatorname{supp}(x^*)$. Niech A_I oraz $A_{\bar{I}}$ oznaczają macierze, których kolumnami są odpowiednio $(A_i)_{i \in I}$ oraz $(A_i)_{i \notin I}$ oraz niech $\operatorname{sgn}(x_I^*)$ będzie wektorem $(\operatorname{sgn}(x_i^*))_{i \in I}$. Załóżmy, że $\ker(A_I) = \mathbf{0}$, wtedy

$$\|A_{\bar{I}}' A_I (A_I' A_I)^{-1} \operatorname{sgn}(x_I^*)\|_\infty < 1 \Longrightarrow S_1 = \{x^*\}$$

Rzadkie rozwiązanie problemu basis pursuit

Sparse solution problemu basis pursuit

Niech $Ax = b$ będzie układem równań liniowych, gdzie A jest macierzą $n \times p$. Istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie $x^* \in S_1$, dla którego $\|x^*\|_0 \leqslant n$.

Jedyność rozwiązania basis pursuit

General position

Macierz $A = (A_1|A_2|\dots|A_p) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ jest w general position jeśli dla każdego $s \in \{-1,1\}^p$, dla każdego podzbioru $I \subset \{1,2,\dots,p\}$, takiego że $\mathrm{card}(I) \leqslant n$, przestrzeń afiniczna $\mathrm{Aff}\{s_i A_i\}_{i\in I}$ spełnia

$$(\forall i \notin I)\ s_j A_j \notin \mathrm{Aff}\{s_i A_i\}_{i\in I}$$

Jeśli macierz A jest w general position to rozwiązanie basis pursuit jest jedyne.

Niech A będzie macierzą losową $n \times p$. Jeśli wektor losowy $(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{np})$ ma gęstość na $\mathbb{R}^{np}$, to z prawdopodobieństwem 1, A jest w general position.

Warunek aby rozwiązanie było najrzadsze

Spark

Spark macierzy A definiujemy jako

$$\mathrm{spark}(A) = \min\{\|h\|_0 : h \in \ker(A) \setminus \{0\}\}$$

Warunek spark

Jeśli $\|x^*\|_0 < \mathrm{spark}(A)/2$, to $S_0 = \{x^*\}$.

Niech A będzie macierzą losową $n \times p$. Jeśli wektor losowy $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{np})$ ma gęstość na $\mathbb{R}^{np}$, to z prawdopodobieństwem 1 $\mathrm{spark}(A) = n + 1$.

Warunek gwarantujący, że rozwiązanie basis pursuit jest sparsest

Mutual coherence

Niech macierz A będzie taka, że $\|A_1\|_2 = \|A_2\|_2 = \cdots = \|A_p\|_2 = 1$. Mutual coherence $M(A)$ definiujemy jako

$$M(A) := \max_{i \neq j} \{| < A_i, A_j > |\}.$$

Warunek mutual coherence

Jeśli $\|x^*\|_0 < \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{M(A)})$, to $S_0 = S_1 = \{x^*\}$

Identyfikowalność

Powiemy, że rozwiązanie x^* jest identyfikowalne w odniesieniu do normy ℓ^1, jeśli

$$(\forall x)\ Ax = Ax^* \wedge x \neq x^* \implies \|x\|_1 > \|x^*\|_1$$

Niech x^* będzie identyfikowalny w odniesieniu do normy ℓ^1, wtedy

1) Wektor $-x^*$ jest identyfikowalny w odniesieniu do normy ℓ^1.
2) Rodzina wektorów $(A_i)_{i \in \mathrm{supp}(x^*)}$ jest liniowo niezależna.
3) Jeśli $\mathrm{sgn}(\tilde{x}) = \mathrm{sgn}(x^*)$, to $\tilde{x}$ jest identyfikowalny w odniesieniu do normy ℓ^1.

Geometryczny opis identyfikowalności

Norma

Niech $\mathrm{rz}(A) = n$. Poprzez N_A definiujemy następującą normę na $\mathbb{R}^p$

$$(\forall y \in \mathbb{R}^p)\ N_A(y) := \min\{\|x\|_1 : Ax = y\}.$$

Niech macierz A będzie w general position. Wektor x^* jest identyfikowalny w odniesieniu do normy ℓ^1 wtedy i tylko wtedy, gdy $N_A(Ax^*) = \|x^*\|_1$.

Podsumowanie

- Minimalizacja "normy" ℓ^0 jest NP–trudna, więc zamieniamy ją na normę ℓ^1
- Zawsze istnieje rozwiązanie sparse problemu basis pursuit
- Bardzo często rozwiązanie jest jedyne
- Jeśli $\|x^*\|_0 < (n+1)/2$, to często basis pursuit odzyskuje rozwiązanie sparsest