

Definicja. Charakterystyka ciała to najmniejsza taka dodatnia liczba naturalna n , że $\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n = 0$, lub 0, jeśli taka liczba nie istnieje.

Zadanie 1. Uzasadnij, że charakterystyka ciała jest zawsze liczbą pierwszą (w przeciwnym wypadku byłyby dzielniki zera).

Definicja. Niech K będzie ciałem. (Pod)ciało proste K to najmniejsze ciało zawarte w K .

Zadanie 2. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem charakterystyki p , to jego ciało proste to $\mathbb{F}_p$, a jeśli jest ciałem charakterystyki 0, to ciało proste to $\mathbb{Q}$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że jeśli $K \subseteq L$ są ciałami (i działania w K to obcięta odpowiednich działań z L), to L jest przestrzenią liniową nad K .

Zadanie 4. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem skończonym, to jest (w naturalny sposób) przestrzenią liniową nad pewnym $\mathbb{F}_p$.

Zadanie 5. Załóżmy że V to przestrzeń liniowa nad ciałem o q elementach, która ma bazę B o k elementach (tu k, q są skończone). Uzasadnij, że V ma q^k elementów (wskazówka: każdy element V przedstawia się jednoznacznie jako kombinacja liniowa elementów B).

Zadanie 6. Wywnioskuj z poprzednich zadań, że jeśli K jest ciałem skończonym, to jego moc jest potęgą liczby pierwszej.

Zadanie 7. Wywnioskuj z poprzednich zadań, że liczba elementów każdej skończonej przestrzeni liniowej jest potęgą liczby pierwszej.

Zadanie 8. Wyznacz ciało o 4 elementach (nazwij jego elementy $0, 1, a, b$ i znajdź tabelki dodawania i mnożenia).

Definicja. Pierścień z dzieleniem to zbiór z działaniami spełniającymi wszystkie aksjomaty ciała prócz przemienności mnożenia (uwaga: niektóre aksjomaty trzeba przez to napisać w dwóch wersjach: lewej i prawej, np. rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Pierścień (z jedynką) to zbiór spełniający te same aksjomaty, co pierścień z dzieleniem, poza istnieniem elementów odwrotnych i aksjomatem $0 \neq 1$.

Na przykład każde ciało jest pierścieniem z dzieleniem, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n , $\mathbb{Z}$ to pierścień, ale nie $\mathbb{N}$ (bo nie ma elementów przeciwnych).

Zadanie 9. Uzasadnij, że skończony pierścień przemienny (tzn. taki, że mnożenie jest przemienne), który nie ma dzielników zera, jest ciałem.

Zadanie 10. Uzasadnij, że skończony pierścień, który nie ma dzielników zera, jest pierścieniem z dzieleniem.

* **Zadanie 11.** Udowodnij, że skończony pierścień z dzieleniem jest ciałem.