

Definicja. *Pierścień z dzieleniem* (lub *ciało skończone*) to zbiór z działaniami $+$, $\cdot$ z wyróżnionymi elementami $0, 1$ spełniającymi analogiczne aksjomaty jak ciała, poza przemiennością mnożenia, z tym że przy aksjomatach rozdzielności i jedynki trzeba uwzględnić obydwie strony:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$
- $1 \cdot a = a \cdot 1 = 1.$

Przestrzeń liniowa nad pierścieniem z dzieleniem jest definiowana dokładnie tak samo, jak nad ciałem.

W szczególności każde ciało jest pierścieniem z dzieleniem. Ponadto tzw. małe twierdzenie Wedderburna mówi, że każdy skończony pierścień z dzieleniem jest ciałem (tzn. jest przemienny).

Definicja. *Kwaterniony* to wyrażenia postaci $a + bi + cj + dk$, przy czym $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ z oczywistym dodawaniem, na których zadajemy mnożenie w taki sposób, że $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$, poza tym rozszerzając w naturalny sposób (formalnie: $\mathbf{R}$ -dwuliniowo).

Zbiór kwaternionów oznaczamy literą $\mathbf{H}$ (od Hamiltona).

Sprzężenie kwaternionu $z = a + bi + cj + dk$ to $\bar{z} := a - bi - cj - dk$. *Norma* to $|z| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Zadanie 1. Sprawdź, że jeśli $z, w \in \mathbf{H}$, to $\overline{zw} = \bar{w}\bar{z}$. (Wskazówka, jak ułatwić rachunki: najpierw rozważ $z = 1, i, j, k$, a potem spróbuj pomachać rękami.)

Zadanie 2. Sprawdź, że jeżeli z jest kwaternionem, to $z\bar{z} = \bar{z}z = |z|^2$. (Wskazówka: wystarczy wyrachować, że $z\bar{z} = |z|^2$.)

Zadanie 3. Wywnioskuj z poprzednich zadań, że dla $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ mamy $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Zadanie 4. Korzystając z poprzedniego zadania, dla danego $z \in \mathbf{H} \setminus \{0\}$, znajdź z^{-1} .

Zadanie 5. Rozważmy funkcję $\varphi: \mathbf{H} \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$ zadaną wzorem

$$\varphi(a + bi + cj + dk) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}.$$

Pokaż że dla $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ mamy $\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1) \varphi(z_2)$ i $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$. (Wskazówka, by ograniczyć rachunki: jak w zadaniu 1.)

Zadanie 6. Wywnioskuj z poprzednich dwóch zadań, że kwaterniony tworzą pierścień z dzieleniem.

Liniową niezależność wektorów i bazę przestrzeni nad pierścieniem z dzieleniem definiujemy analogicznie, jak nad ciałami.

Zadanie 7. Przekonaj się (i innych?), że dowody równoważności definicji bazy oraz istnienia bazy z wykładu działają też dla przestrzeni liniowych nad pierścieniami z dzieleniem.