

Przykład. Przykłady pierścieni (przemiennych z jedyneką)

- $\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{Z}_n$,
- ciało,
- $R[X]$, gdzie R jest pierścieniem,
- pierścień wielomianów większej (być może nieskończonej, nawet nieprzeliczalnej) liczby zmiennych,
- $R[\varepsilon]$, gdzie $\varepsilon^2 = 0$,
- R^n , gdzie R jest pierścieniem,
- pierścień $C(X)$ funkcji ciągłych (o wartościach w $\mathbb{R}$) na przestrzeni topologicznej X ,
- pierścień $C^\infty(M)$ funkcji gładkich na rozmaitości różniczkowalnej M (jeśli nie wiesz, co to rozmaitość, możesz myśleć, że M jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$).

Definicja. *Moduł nad pierścieniem R* to zbiór z wyróżnionym elementem 0 i działaniami $+: M \times M \rightarrow M$, $\cdot: R \times M \rightarrow M$ spełniającymi te same aksjomaty, co przestrzeń liniowa (poza tym, że R nie musi być ciałem).

Przykład. • przestrzenie liniowe są modułami,

- jeśli R jest pierścieniem, to R^n jest modułem nad R ,
- $\mathbb{Z}_6$ jest modułem nad $\mathbb{Z}$,
- ogólniej, jeśli R jest pierścieniem, to jest modułem nad $\mathbb{Z}$,
- ogólniej, jeśli M jest modułem nad R , to jest modułem nad $\mathbb{Z}$,
- jeśli M jest rozmaitością różniczkowalną i n jest ustalone, to rodzina wszystkich gładkich n -wymiarowych pól wektorowych na M jest modułem nad $C^\infty(M)$.

Definicja. Jeśli M jest R -modułem, to mówimy że $B \subseteq M$ jest *liniowo niezależny*, jeśli jego elementy nie spełniają żadnego nietrywialnego równania liniowego o współczynnikach z R (tak samo, jak dla przestrzeni liniowych).

Mówimy że B jest *bazą*, jeśli ponadto $M = \text{Lin}_R(B)$.

Mówimy że M jest *wolny*, jeśli ma bazę.

Zadanie 1. Sprawdź, że R^n jest wolnym R -modułem.

Zadanie 2. Sprawdź, że $\{2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$ rozpina $\mathbb{Z}$ jako $\mathbb{Z}$ -moduł, ale nie zawiera żadnej bazy (mimo że $\mathbb{Z}$ jest wolnym $\mathbb{Z}$ -modułem).

Zadanie 3. Sprawdź, że $\{2\} \subseteq \mathbb{Z}$ jest liniowo niezależny, ale nie rozszerza się do bazy $\mathbb{Z}$ jako $\mathbb{Z}$ -modułu.

Zadanie 4. Sprawdź, że $\mathbb{Z}_2$ nie jest wolnym $\mathbb{Z}$ -modułem, ani nie jest wolnym $\mathbb{Z}_4$ -modułem, ani w ogóle nie jest $\mathbb{Z}_3$ -modułem.

Zadanie 5. Znajdź wszystkie $\mathbb{Z}$ -liniowo niezależne podzbiory $\mathbb{Q}$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbb{Q}$ nie jest wolnym $\mathbb{Z}$ -modułem.

Zadanie 6. Sprawdź, że jeśli M jest wolnym R -modułem i ma bazę o n elementach, to $M \cong R^n$ (jako R -moduł).

Zadanie 7. Sprawdź, że jeśli V jest przestrzenią liniową nad K i $F \in \text{End}(V)$, to V ma strukturę $K[X]$ -modułu zadaną przez $P \cdot v := P(F)(v)$.

Zadanie 8. Zauważ, że moduł z poprzedniego zadania nigdy nie jest wolny, jeśli $0 < \dim_K V < \infty$.

Zadanie 9. Zdefiniuj sumę prostą modułów (nad ustalonym pierścieniem).

Zadanie 10. Sprawdź, że $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$. Wywnioskuj stąd (rozważając je jako $\mathbb{Z}_6$ -moduły), że suma prosta modułów, które nie są wolne, może być wolna.

Zadanie 11. Podaj przykład modułu M nad $\mathbb{Z}$, takiego że $M \oplus N$ nigdy nie jest wolnym $\mathbb{Z}$ -modułem. (Moduł M taki, że istnieje N , taki że $M \oplus N$ jest wolny, nazywamy projektywnym.)

Zadanie 12. Uzasadnij, że $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ nie jest dopełnialny (to znaczy: nie istnieje $M \leq \mathbb{Z}$ taki że $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \oplus M$).

Zadanie 13. Zdefiniuj moduł dualny.

Zadanie 14. Znajdź przykład niezerowego modułu M , takiego że M^* jest zerowy. (W szczególności naturalne odwzorowanie $M \rightarrow M^{**}$ nie jest różnowartościowe.)