

Definicja. *Kategorią* nazywamy zbiór¹ $\mathcal{O}$ obiektów, wraz z przyporządkowaniem każdej parze obiektów A, B zbioru² $\text{Hom}(A, B)$ morfizmów $A \rightarrow B$ (które nie muszą być funkcjami!) o następujących własnościach:

- Dla $f \in \text{Hom}(A, B)$, $g \in \text{Hom}(B, C)$ mamy dobrze określone $g \circ f \in \text{Hom}(A, C)$.
- $\circ$ z poprzedniego podpunktu jest łączne, tzn. dla $f \in \text{Hom}(A, B)$, $g \in \text{Hom}(B, C)$, $h \in \text{Hom}(C, D)$ zachodzi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Dla wszystkich obiektów A mamy wyróżnione morfizmy $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$, takie że dla dowolnego $f \in \text{Hom}(A, B)$ zachodzi $f = \text{id}_B \circ f = f \circ \text{id}_A$.

Przykłady. • kategoria zbiorów: obiekty to zbiory, $\text{Hom}(A, B)$ to funkcje $A \rightarrow B$;

- kategoria przestrzeni liniowych nad K : $\text{Hom}(A, B)$ to odwzorowania K -liniowe $A \rightarrow B$;
- jeżeli X jest dowolnym zbiorem, to mamy kategorię dyskretną, której obiektami są elementy X , a $\text{Hom}(X, Y) = \begin{cases} \{\text{id}_X\} & X = Y \\ \emptyset & X \neq Y \end{cases}$.
- jeżeli $P = (P, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to mamy kategorię której obiektami są elementy P , a

$$\text{Hom}(p, q) = \begin{cases} \{\text{id}_p\} & p = q \\ \{*\} & p < q \\ \emptyset & p \not\leq q, \end{cases}$$

gdzie $*$ jest wyróżnionym elementem.

- Jeżeli $\mathcal{C}$ jest kategorią, a A jej obiektem, to mamy kategorię $\mathcal{C}_A$, której obiektami są morfizmy $B \rightarrow A$ w $\mathcal{C}$, a dla $f \in \text{Hom}(B, A)$, $g \in \text{Hom}(C, A)$, morfizm $f \rightarrow g$ to $h \in \text{Hom}(B, C)$ taki że $f = g \circ h$.

Zadanie 1. Przekonaj się, że powyższe przykłady są kategoriami.

Zadanie 2. Spróbuj wymyślić inne przykłady kategorii.

Przykład. Mówimy że diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

¹tak naprawdę niekoniecznie zbiór; kategorie w których to jest zbiór nazywamy *małymi*

²... na ogół; jeżeli chcemy doprecyzować, że tak jest, mówimy że kategoria jest *lokalnie mała*

jest *diagramem przemiennym* (w kategorii $\mathcal{C}$), jeżeli A, B, C są obiektami $\mathcal{C}$, f, g, h są odpowiednimi morfizmami i obydwie drogi dojścia z A do C są równe, tzn. $h = g \circ f$.

Zadanie 3. Spróbuj wymyślić, co oznacza przemiennność diagramów:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & & A & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \downarrow g & & \downarrow g \\ B_1 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & & A & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Spróbuj uogólnić.

Definicja. Mówimy że morfizm $f \in \text{Hom}(A, B)$ jest *izomorfizmem* jeżeli istnieje morfizm $g \in \text{Hom}(B, A)$ taki że $f \circ g = \text{id}_B$ i $g \circ f = \text{id}_A$. Innymi słowy, diagram

$$\text{id}_A \hookrightarrow A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} B \hookrightarrow \text{id}_B$$

jest przemienny.

Zadanie 4. Opisz czym są izomorfizmy w kategoriach opisanych powyżej.

Definicja. Mówimy że morfizm $f \in \text{Hom}(A, B)$ jest *monomorfizmem* jeśli dla dowolnego C i $g_1, g_2 \in \text{Hom}(C, A)$, jeśli $f \circ g_1 = f \circ g_2$, to $g_1 = g_2$.

Podobnie, mówimy że f jest *epimorfizmem*, gdy dla dowolnego C i $g_1, g_2 \in \text{Hom}(B, C)$, jeśli $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, to $g_1 = g_2$.

Zadanie 5. Sprawdź że każdy izomorfizm jest monomorfizmem i epimorfizmem.

Zadanie 6. W każdej z kategorii powyżej rozpoznaj monomorfizmy i epimorfizmy.

Zadanie 7. Czy każdy morfizm, który jest monomorfizmem i epimorfizmem jest izomorfizmem?