

Zadanie 1. Rozstrzygnij (z uzasadnieniem), które z podanych zbiorów są ciałami.

- a) $\mathbb{Q}$, b) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, c) $\mathbb{Q}[i]$, d) $\mathbb{Z}$, e) $\mathbb{Z}_n$.

Tu $\mathbb{Z}_n$ to liczby całkowite od 0 do $n-1$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n . W pozostałych zbiorach dodajemy i mnożymy jak zwykle w $\mathbb{C}$.

(Możesz założyć bez dowodu, że działania dodawania i mnożenia w $\mathbb{C}$ spełniają oczywiste własności łączności, przemienności i rozdzielności.)

Zadanie 2. Używając jedynie aksjomatów przestrzeni liniowej (i arytmetyki liczb) uzasadnij precyzyjnie, że $5(u+w) + 2w = 7(u+w) + (-2)u$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem, to elementy odwrotny i przeciwny do danego są jedyne, to znaczy:

- a) dla każdych x, y , jeżeli $x + y_1 = x + y_2 = 0$, to $y_1 = y_2$,
b) dla każdych x, y , jeżeli $xy_1 = xy_2 = 1$, to $y_1 = y_2$.

Zadanie 4. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi (a, b to skalary, v, w – wektory):

- a) $-(v-w) = (-v) + w$; b) $av = 0 \iff (a = 0 \vee v = 0)$;
c) $(a-b)v = av - bv$; d) $a(-v) = (-a)v = -av$;
e) $av + bw = bv + aw \iff (a = b \vee v = w)$.

Zadanie 5. Znajdź $\text{Lin}((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ w $\mathbb{R}^3$ (opisz ten zbiór równaniem lub układem równań).

Zadanie 6. Odwołując się do wiedzy z I semestru opisz wszystkie podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 7. Uzasadnij lub obal (A, B to dowolne podzbiory dowolnej przestrzeni liniowej, $+$ oznacza sumę kompleksową):

- a) $\text{Lin}(A \cup B) = \text{Lin}(A) + \text{Lin}(B)$, b) $\text{Lin}(A \cap B) = \text{Lin}(A) \cap \text{Lin}(B)$, c) $A \subseteq B \Rightarrow \text{Lin}(A) \subseteq \text{Lin}(B)$.

Zadanie 8. Załóżmy że V jest przestrzenią liniową nad ciałem skończonym K o p^k elementach.¹ Niech $v_1, v_2, v_3 \in V$. Ile najwięcej elementów może mieć $\text{Lin}(v_1, v_2, v_3)$? Kiedy tak będzie?

Zadanie 9. Sprawdź starannie, że przestrzeń $\mathbb{R}^A$ wszystkich funkcji ze zbioru A w $\mathbb{R}$ jest (z działaniami zadanymi przez $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$, $(\alpha f)(a) = \alpha \cdot f(a)$) przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$.

Zadanie 10. Dla $z \in \mathbb{C}$ spróbuj zdefiniować, czym powinno być $\mathbb{Q}[z]$ (jak wyglądają jego elementy), jeżeli ma być zamknięte na mnożenie i dodawanie, przy założeniu że:

- a) $z^3 \in \mathbb{Z}$, b) $z^2 + z + 1 = 0$, c) z jest dowolna.

Kiedy $\mathbb{Q}[z]$ jest ciałem? Podaj przykład $z \in \mathbb{C}$, dla którego $\mathbb{Q}[z]$ nie jest ciałem.

¹Można pokazać, że liczba elementów ciała skończonego zawsze jest potęgą liczby pierwszej. Możemy to zrobić na konwersatorium.