

Zadanie 0. Niektóre zera na poprzedniej liście oznaczają wektor zerowy. Znajdź je wszystkie i dorysuj nad nimi strzałki.

Zadanie 1. Pokaż że jeżeli $W_1, W_2 \leq V$, to $W_1 \cap W_2 \leq V$.

Zadanie 2. Wskaż bazę $\mathbf{R}_3[X]$ do której należą wielomiany $1 + X^2, 1 + 2X + X^3$.

Zadanie 3. Sprawdź że jeżeli $A, B \subseteq V$ są rozłączne i $A \cup B$ jest lnz, to $\text{Lin} A \cap \text{Lin} B = \{0\}$.

Zadanie 4. Podaj przykład trójki $V_1, V_2 < W$, takiej że ani $V_1 \cup V_2$, ani $V_1 \setminus V_2$ nie jest podprzestrzenią W .

Zadanie 5. Wykaż, że w dowolnym ciele zachodzą tożsamości: $(-1)x = -x$, $-(-x) = x$, $(-1)(-1) = 1$, $(-x)y = -xy$, $(x-y)z = xz - yz$, $\frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$ (dla $z \neq 0$), $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$ (dla $x, y \neq 0$), $\frac{z}{x} + \frac{t}{y} = \frac{zy+tx}{xy}$ (dla $x, y \neq 0$), $x - (y-z) = (x-y) - z$.

Zadanie 6. Uzasadnij, że jeśli w układzie $v_1, \dots, v_n$ pewne dwa wektory są równe, to układ ten jest lz. Uzasadnij, że jeśli w układzie $v_1, \dots, v_n$ pewien wektor jest równy 0, to układ ten jest lz.

Zadanie 7. Dla dowolnych podzbiorów W_1, W_2 przestrzeni liniowej V , uzasadnij że:

- a) jeżeli $W_2 \leq V$ i $W_1 \leq W_2$, to $W_1 \leq V$,
- b) jeżeli $W_1, W_2 \leq V$ i $W_1 \subseteq W_2$, to $W_1 \leq W_2$.

Zadanie 8. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami:

- a) $C(\mathbf{R})$: $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid f(7) = 0\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid f(12) \geq f(-12)\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid (\forall x \in \mathbf{R})(f'(x) \geq 0)\}$, $\{f \in C^1(\mathbf{R}) \mid (\forall x \in \mathbf{R})(3f'(x) + x^2 f(x) = 0)\}$;
- b) przestrzeni $c = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in \mathbf{R}\}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych: $\{(a_n) \mid (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = a_{n+1} - 3a_n)\}$, $\{(a_n) \mid a_{17} + a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) \mid a_{17} = a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) \mid a_5 + a_7 + a_{15} = 0\}$;
- c) $\mathbf{R}^3$ – podzbiory określone przez równania: $z^2 = x^2 + 2y^2$, $x + y + 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;
- d) przestrzeni wielomianów $\mathbf{R}[X]$: wielomiany stopnia 7, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(2) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P''(-1) + P(4) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P''(2) + P(0)^2 = 0\}$,

Zadanie 9. Uzasadnij, że jeśli $v_1, \dots, v_n$ są lnz, a v_{n+1} nie jest ich kombinacją liniową, to $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ są lnz. Czy jest też odwrotnie?

Zadanie 10. Wskaż możliwie duży liniowo niezależny podzbiór przestrzeni $V = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(-1) = 0\}$.

Zadanie 11. W zbiorze $A = \{(0, 0, 0, 0)^T, (1, 0, 1, 0)^T, (1, 2, 1, 3)^T, (2, 2, 2, 3)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}$ wskaż podzbiór, który jest bazą $\text{Lin}(A)$ (rzecz dzieje się w $\mathbf{R}^4$).

Zadanie 12. Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathbf{R}^5$ zadanej układem równań:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

(Uzasadnij, że jest to naprawdę baza.)

Zadanie 13.

- a) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) \neq 0$.
- b) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) = 0$, ale $P(2) \neq 0$.
- c) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) = P(2) = 0$, ale $P'''(0) \neq 0$.
- d) Wywnioskuj, że $\dim\{P \in \mathbf{R}_5[X] \mid P'(-1) = P(2) = P'''(0) = 0\} \leq 3$.

Zadanie 14. Uzasadnij, że jeśli 3-elementowy zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą V , to również $\{u + v, u + 2v + w, w\}$ jest bazą V .

Algebra liniowa 2 R, Lista 1

Zadanie 15. Uzasadnij że jeżeli $(K, +, \cdot, 0, 1)$ spełnia wszystkie aksjomaty ciała, poza tym że $0 = 1$, to K ma dokładnie jeden element. Następnie zastanów się, czy naprawdę potrzeba do tego wszystkich aksjomatów ciała.

Zadanie 16. Uzasadnij, że wielomian o współczynnikach rzeczywistych, który ma przynajmniej jeden niezerowy współczynnik, nie zadaje funkcji zerowej. Wywnioskuj stąd, że różne wielomiany zadają różne funkcje wielomianowe $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Czy to jest prawdą dla innych ciał, zamiast $\mathbf{R}$?

Zadanie 17. Dla $V = \mathbf{R}^2$ stwierdź, jak duży (jakiej mocy) jest zbiór P , o którym mowa w dowodzie istnienia bazy. Jak długi może być łańcuch w $(P, \subseteq)$ w tym przypadku? Uzasadnij, że $\mathbf{R}^2$ ma bazę, w możliwie łatwy sposób.

Zadanie 18. Niech $V = \mathbf{R}_3[X]$, $A = \{1 + X - X^2 - X^3, 1 + 2X^2 - 3X^3, X - 2X^2 + X^3\}$. Spróbuj możliwie prosto opisać $\text{Lin}(A)$: podaj warunek, pozwalający łatwo stwierdzić dla danych a, b, c, d , czy wielomian $aX^3 + bX^2 + cX + d$ należy do $\text{Lin}(A)$. Przetestuj swój warunek na wielomianach $5X^3 + 4X - 8$, $X^2 + 2X - 3$.

Zadanie 19. Udowodnij, że B jest bazą przestrzeni liniowej V wtedy i tylko wtedy, gdy jest minimalnym podzbiorem V liniowo generującym V . [Bardziej symbolicznie, udowodnij że: B jest bazą $V \iff (B \subseteq V) \wedge ((\forall C \subseteq V)((\text{Lin}(C) = V \wedge C \subseteq B) \Rightarrow (C = B)))$.]