Zadanie 1. Znajdź pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $(1,5,2,1,3)^\top,(-1,4,2,-2,0)^\top$, oraz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $(1,2,3,4)^\top,(1,-1,0,1)^\top,(0,1,1,-1)^\top$.

Zadanie 2. Użyj macierzy Grama by wyznaczyć odległość punktu $(1,2,3,4)^\top$ od płaszczyzny $\mathrm{Lin}(\{(1,-1,1,-1)^\top,\ (0,1,2,-1)^\top\})$ (korzystając z wzoru na objętość równoległościanu w $\mathbf{R}^4$).

Zadanie 3. Oblicz n-wymiarową objętość równoległościanu rozpiętego przez n wektorów:
a) $(1,-1,1,-1)^\top,(1,1,1,1)^\top,(1,0,-1,0)^\top,(0,1,0,-1)^\top$;
b) $(1,0,0,2,5)^\top,(0,1,0,3,4)^\top,(0,0,1,4,7)^\top,(2,-3,4,11,12)^\top,(0,0,0,0,1)^\top$.

Zadanie 4. Sprawdź, że macierz Grama bazy B przestrzeni euklidesowej V jest równa macierzy formy kwadratowej $V \ni v \mapsto |v|^2 \in \mathbf{R}$ w bazie B.

Zadanie 5. Uzasadnij że dla $W \le V$ i $v \in V$, jeżeli $v \notin W^\perp$, to kąt między v i W (czyli infimum kątów między v i w dla $w \in W$) to kąt między v i $\pi_W(v)$. *(Wskazówka: zauważ, że wystarczy pokazać to w* $\mathbf{R}^3$*.)*

Zadanie 6. Udowodnij (np. korzystając z poprzedniego zadania) że dla $W \le V$ i $v \in V$ zachodzi $d(v,W) = \sin(\theta)|v|$, gdzie θ to kąt między W i v.

Zadanie 7. Czy zbiór $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^\top \in \mathbf{R}^4 : x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4+2x_4x_1 = 1\}$ jest ograniczony?

Zadanie 8. Rozważmy trójwymiarową kwadrykę M w $\mathbf{R}^4$ zadaną równaniem $Q(v) = 1$, gdzie $Q(v) = 2v_1v_2 - 2v_3v_4 = v_1'^2 + v_2'^2 - v_3'^2 - v_4'^2$.
Uzasadnij że M:
a) ma przekrój (z płaszczyzną), który jest hiperbolą,
b) ma przekrój (z płaszczyzną), który jest elipsą (a nawet okręgiem),
c) ma przekrój (z trójwymiarową przestrzenią), który jest hiperboloidą,
d) ma przekrój (z trójwymiarową przestrzenią), który jest stożkiem,
e) powstaje przez obrót pewnej hiperboloidy dwupowłokowej wokół pewnej płaszczyzny.
Uwaga: płaszczyzny i przestrzenie w tym zadaniu nie muszą być liniowymi podprzestrzeniami, mogą też być ich warstwami!

Zadanie 9. Oblicz kąt między główną przekątną n-wymiarowej kostki a jej k-wymiarową ścianą. (Kostka w $\mathbf{R}^n$ to równoległościan rozpięty przez wektory standardowej bazy. Jedną z jego głównych przekątnych jest odcinek łączący $(0,\dots,0)^\top$ i $(1,\dots,1)^\top$.)

Zadanie 10. Niech $M \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą symetryczną. Udowodnij równoważność następujących warunków:
a) w $\mathbf{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym istnieje n liniowo niezależnych wektorów, których macierzą Grama jest M;
b) w pewnej przestrzeni euklidesowej istnieje n liniowo niezależnych wektorów, których macierzą Grama jest M;
c) M jest dodatnio określona;
d) na $\mathbf{R}^n$ można zadać iloczyn skalarny tak, by macierzą Grama bazy standardowej była macierz M.
Sprawdź, że ten sam dowód działa w przypadku unitarnym.

Zadanie 11. Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbf{R}^3$, taki że cosinusy kątów między wektorami e_1,e_2,e_3, wynoszą $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$?

Zadanie 12. Czy istnieją punkty a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 w $\mathbf{R}^n$ (dla pewnego n), takie że macierzą odległości $(d(a_i, a_j))$ jest macierz $\begin{pmatrix} 0 & 3 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \\ 3 & 0 & \sqrt{14} & \sqrt{14} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & \sqrt{2} & 0 & 3 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{17} & 3 & 0 \end{pmatrix}$? Jeśli tak, to znajdź najmniejsze możliwe n.

Zadanie 13. Udowodnij, że dla $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ zachodzi nierówność (Hadamarda) $(\det(A))^2 \leq \Pi_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)$.

Zadanie 14. (V unitarna, $F, G : V \to V$ liniowe) Uzasadnij (najlepiej nie używając twierdzenia spektralnego), że:

a) Jeśli F jest unitarne a 1 nie jest jego wartością własną, to $G = i(F - \mathrm{id})^{-1}(F + \mathrm{id})$ jest samosprzężone.

b) Jeśli G jest samosprzężone, to $F = (G - i\,\mathrm{id})^{-1}(G + i\,\mathrm{id})$ jest unitarne.

Zadanie 15. Niech A będzie rzeczywistą macierzą kwadratową i antysymetryczną ($A^\top = -A$). Udowodnij, że $\chi_A(x)$ nie ma niezerowych pierwiastków rzeczywistych (wskazówka: rozważ iA).

Zadanie 16. Wykaż, że objętość równoległościanu spełnia $V(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l) \leq V(a_1, \dots, a_k)V(b_1, \dots, b_l)$.

Zadanie 17. Wykaż, że jeśli układ k wektorów w n wymiarowej rzeczywistej przestrzeni euklidesowej ma tę własność, że każde dwa z nich tworzą kąt rozwarty, to $k \leq n + 1$.

Zadanie 18. Uzasadnij, że w $\mathbf{R}_n[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ odległość X^n od $\mathrm{Lin}\{1, X, \dots, X^{n-1}\}$ wynosi $\left(\binom{2n}{n}\sqrt{2n+1}\right)^{-1}$.

Zadanie 19. (V unitarna) Uzasadnij, że każde przekształcenie liniowe $V \to V$ jest kombinacją liniową czterech przekształceń unitarnych.

Zadanie 20. Załóżmy, że wektory $v_1, \dots, v_n$ rozpinają $(n-1)$-wymiarową podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej V. Jaka jest $(n-1)$-wymiarowa objętość zbioru $\{\sum_{i=1}^n t_i v_i : 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1\}$?