

Zadanie 1. Niech macierzą przekształcenia $F: V \rightarrow W$ względem baz: (e_1, e_2, e_3) przestrzeni V i (f_1, f_2) przestrzeni W , będzie $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.

Zadanie 2. Niech $F: \mathbf{R}_2[X] \rightarrow \mathbf{R}_2[X]$ będzie zadane przez $m_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $B = (1, X, X^2)$. Oblicz $m_C(F)$ dla $C = (3X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 2, 2X^2 + X + 3)$.

Zadanie 3. Niech $B = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$, $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $m_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$, gdzie $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Oblicz $m_C(F)$.

Zadanie 4. Rozważmy przekształcenie liniowe $F: \mathbf{R}_2[X] \rightarrow \mathbf{R}^3$ dane wzorem $F(P) = (P(-1), P'(0), P(1))^T$. Niech $B = \{1, X, X^2\}$ będzie bazą $\mathbf{R}_2[X]$, zaś $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ bazą standardową $\mathbf{R}^3$. (a) Znajdź $m_E^B(F)$. (b) Niech $C = \{E_1 + 2E_3, E_3, E_2 + E_1\}$. Znajdź $m_C^B(F)$. (c) Czy F jest odwracalne?

Zadanie 5. Znajdź (za pomocą eliminacji Gaussa) macierze odwrotne do następujących:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 6. Rozwiąż w S_7 równania:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix};$ b) $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

(Wskazówka: pomnóż z właściwej strony przez odpowiednią permutację odwrotną.)

Zadanie 7. Permutację $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ przedstaw w postaci (a) iloczynu transpozycji; (b) iloczynu transpozycji postaci $(i, i + 1)$; (c) iloczynu rozłącznych cykli. Postaraj się znaleźć przedstawienia możliwie małą liczbą czynników.

Zadanie 8. Uzasadnij wzór $(i - 1, i)(i, i + 1)(i - 1, i) = (i, i + 1)(i - 1, i)(i, i + 1)$.

Zadanie 9. Niech $B = (1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$, $m_C^B(\text{id}_{\mathbf{R}_3[X]}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Znajdź C .

Zadanie 10. Niech $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem $F((x, y, z)^T) = (2x + z, x + y + z, y - z)^T$. Niech $B = ((1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T, (1, 1, 0)^T)$. Znajdź (jeśli to możliwe) bazę C przestrzeni $\mathbf{R}^3$, taką że (a) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Zadanie 11. Niech $V = \{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P''(1) + 3P(0) = 0\}$, zaś $F: V \rightarrow \mathbf{R}^3$ niech będzie dane wzorem $F(P) = (P(-1), P(0), P(1))^T$. Znajdź $F^{-1}((0, 1, 0)^T)$.

Zadanie 12. Wiadomo, że B, C, D to bazy $\mathbf{R}^3$, zaś $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Co więcej, $B = ((1, 1, 1)^\top, (0, 1, 1)^\top, (0, 1, 0)^\top)$,
 $m_D^C(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Znajdź D .

Zadanie 13. Czy jest odwracalne przekształcenie $\mathbf{R}_{22}[X] \ni P \mapsto P'' + 3P' + 2P \in \mathbf{R}_{22}[X]$?

Zadanie 14. Niech $E = (1)$ będzie bazą $\mathbf{R}^1$, B bazą V , zaś $f \in V^*$. Uzasadnij, że wyrazy macierzy $m_E^B(f)$ to współrzędne f w bazie V^* dualnej do bazy B . (zakładamy $\dim(V) < \infty$)

Zadanie 15. Niech B, B' będą bazami V ; C, C' – bazami W , zaś $F: V \rightarrow W$. Uzasadnij, że $\text{rk}(m_C^B(F)) = \text{rk}(m_{C'}^{B'}(F))$.

Zadanie 16. Uzasadnij, że jeśli $G: V \rightarrow W$, $F: W \rightarrow Z$, przy czym $\dim(V) = \dim(Z) = 9$, $\dim(W) = 7$, to $F \circ G$ nie jest izomorfizmem.

Zadanie 17. Niech $C = (c_1, \dots, c_n)$ będzie bazą V , zaś $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_j$ dla $i = 1, \dots, n$. Udowodnij, że $B = (b_1, \dots, b_n)$ jest bazą $V \iff A = (a_{ij})$ jest odwracalna. Czy wtedy $A = m_C^B(\text{id})$, czy też może $A = m_B^C(\text{id})$?

Zadanie 18. Uzasadnij, że każde $\sigma \in S_n$ można przedstawić jako iloczyn transpozycji $(1, j)$ dla $j = 2, \dots, n$.

Zadanie 19. Niech $F: V \rightarrow V$, $W < V$, $F[W] \subseteq W$. Niech $(b_1, \dots, b_k)$ będzie bazą W , zaś $B = (b_1, \dots, b_n)$ bazą V .

- Wykaż, że wzór $\bar{F}(v + W) = F(v) + W$ zadaje dobrze określone przekształcenie liniowe $\bar{F}: V/W \rightarrow V/W$.
- Uzasadnij, że $B' = (b_{k+1} + W, \dots, b_n + W)$ jest bazą V/W .
- Jak ma się $m_B(F)$ do $m_{B'}(\bar{F})$?

Zadanie 20. Wykaż, że dla dowolnego niezerowego funkcjonału f na (skończenie wymiarowej) przestrzeni V istnieje baza $(b_1, \dots, b_n)$ przestrzeni V , taka że $f(\sum_{i=1}^n t_i b_i) = t_1$ (dla wszelakich skalarów $t_1, \dots, t_n$). Znajdź taką bazę dla $V = \mathbf{R}_n[X]$, $f(P) = \int_0^1 P(X) dX$; czy jest ona jedyna?

Zadanie 21. Niech $F: V \rightarrow W$, B niech będzie bazą V , a C – bazą W . Niech $F^*: W^* \rightarrow V^*$ będzie dane wzorem $F^*(f) = f \circ F$. Wyraź $m_{B^*}^{C^*}(F^*)$ przez $m_C^B(F)$.

Zadanie 22. Niech B będzie pewną (skończoną) bazą V . Dozwolone są następujące operacje: zamiana kolejności wektorów, pomnożenie wektora przez niezerowy skalar, dodanie skalarnej krotkości pewnego wektora do innego wektora. Czy każdą bazę V można uzyskać z B przez ciąg takich operacji?

Zadanie 23. Niech $F: V \rightarrow W$, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = k$. Niech też $A \in M_{k \times n}(K)$ będzie macierzą której rząd jest równy $\dim \text{im}(F)$. Udowodnij, że istnieją bazy: B przestrzeni V i C przestrzeni W , takie że $m_C^B(F) = A$.