

Zadanie 1. Wyznacz liczbę inwersji w permutacjach $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix})$, $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{smallmatrix})$, $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{smallmatrix})$, $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{smallmatrix})$.

Zadanie 2. Wyjaśnij które z podanych iloczynów (i z jakim znakiem) występują w rozwinięciu wyznacznika macierzy odpowiedniego (jakiego?) rozmiaru: a) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; b) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; c) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.

Zadanie 3. Wybierz takie wartości i, j, k aby iloczyn $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ wystąpił ze znakiem minus w rozwinięciu wyznacznika stopnia 6.

Zadanie 4. Wykorzystując wzór na pełne rozwinięcie wyznacznika (lub inaczej) oblicz

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \text{d)} \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & & \text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Zadanie 5. Za pomocą pełnego rozwinięcia oblicz wartość wyznacznika, którego elementy na głównej przekątnej są wszystkie równe 1, elementy j -tego wiersza są równe $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j = 1, a_{j+1}, \dots, a_n$, a wszystkie pozostałe wyrazy są równe 0.

Zadanie 6. Znajdź wyrazy, które zawierają a) x^3 , b) x^4 w rozwinięciu wyznacznika

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

Zadanie 7. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \end{array}$$

Zadanie 8. Jak zmieni się wartość wyznacznika $n \times n$ jeśli:

- znak każdego z jego wyrazów zmienić na przeciwny?
- każdy element a_{ij} pomnożyć przez c^{i-j} , $c \neq 0$?
- pierwszą kolumnę przestawić na ostatnie miejsce, a pozostałe przesunąć w lewo, zachowując ich porządek?
- wiersze zapisać w odwrotnym porządku?

Zadanie 9. Zakładając że $1 + 1 \neq 0$, wykaż, że dowolny wyznacznik jest równy połowie sumy dwóch wyznaczników, z których jeden jest otrzymany z danego przez dodanie do wszystkich wyrazów i -tego wiersza liczby a , a drugi jest otrzymany z danego przez dodanie do wszystkich wyrazów i -tego wiersza liczby $-a$.

Zadanie 10. Uzasadnij, że jeśli A i B są macierzami kwadratowymi, to $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$. Za pomocą indukcji spróbuj to uogólnić na większą liczbę macierzy kwadratowych. (Wsk. Rozważ pełne rozwinięcie wyznacznika; uzasadnij, że jeśli w pewnym wyrazie tego rozwinięcia jednym z czynników jest jakiś element macierzy C , to innym czynnikiem w tym samym wyrazie musi być 0.)

Zadanie 11. Oblicz wyznaczniki, np. przez sprowadzenie do postaci trójkątnej:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Zadanie 12. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + x \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix} \end{array}$$

Zadanie 13. Oblicz rekurencyjnie wyznaczniki:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix} \quad \text{c)} \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Zadanie 14. Oblicz podane wyznaczniki, zapisując je w postaci iloczynu wyznaczników :

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} \cos(x_1 - y_1) & \cos(x_1 - y_2) & \dots & \cos(x_1 - y_n) \\ \cos(x_2 - y_1) & \cos(x_2 - y_2) & \dots & \cos(x_2 - y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(x_n - y_1) & \cos(x_n - y_2) & \dots & \cos(x_n - y_n) \end{vmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad s_k := x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k.$$

Zadanie 15. Z tego, że liczby 1798, 2139, 3255 i 4867 dzielą się przez 31 wywnioskuj, że dzieli się przez 31.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Zadanie 16. Wskaż maksymalnego rozmiaru niezerowy minor macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 11 & 7 & 15 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 17. Pewna macierz 50×100 ma niezerowy minor rozmiaru 37×37 . Co można powiedzieć o wymiarze jądra przekształcenia zadanego tą macierzą?

Zadanie 18. Niech V będzie k -wymiarową podprzestrzenią $\mathbf{R}^n$. Udowodnij, że istnieją $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, takie że odwzorowanie $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ dane przez $F((x_1, \dots, x_n)^T) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})^T$ po obcięciu do V jest izomorfizmem $V \rightarrow \mathbf{R}^k$.

Zadanie 19. Udowodnij, że jeśli dla każdej pary $i \neq j$ zachodzi $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$, to $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Zadanie 20. Załóżmy że funkcje $f_1, \dots, f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ są $n-1$ razy różniczkowalne. Udowodnij, że jeśli dla pewnego

$$x \in \mathbf{R} \text{ zachodzi } \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \dots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \dots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ to } f_1, \dots, f_n \text{ są lnz (w przestrzeni wszystkich funkcji z } \mathbf{R} \text{ w}$$

$\mathbf{R})$.¹ Czy zachodzi twierdzenie odwrotne?

Zadanie 21. Na $M_{n \times n}(\mathbf{R})$ definiujemy relację równoważności $\sim : A \sim B \iff B$ można uzyskać z A przez ciąg operacji kolumnowych. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$.

Zadanie 22. Pokaż, że $\det((x_i + y_j)^{-1}) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) / \prod_{i,j} (x_i + y_j)$. (Jest to tzw. wyznacznik Cauchy'ego.)

Zadanie 23. Po $\mathbf{Z}$ spaceruje losowo n policjantów; każdy ma własną monetę, co minutę nią rzuca, na orła robi krok długości 1 w prawo, a na reszkę krok długości 1 w lewo. Niech $a_1 < \dots < a_n$, $b_1 < \dots < b_n$ będą liczbami parzystymi; niech p_{ij} oznacza prawdopodobieństwo, że policjant wychodzący z a_i po godzinie znajdzie się w b_j . Udowodnij, że prawdopodobieństwo tego że n policjantów zaczynających spacer w $a_1, \dots, a_n$ po godzinie znajdzie się w $b_1, \dots, b_n$, przy czym po drodze żadeni dwaj się nie spotkają, wynosi $\det(p_{ij})$.

Zadanie 24. Niech $v_1, \dots, v_n \in V$ oraz niech $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$. Załóżmy, że $\det(\varphi_i(v_j)) \neq 0$. Udowodnij, że wtedy (v_i) są lnz w V oraz (φ_j) są lnz w V^* . Czy jest też odwrotnie?

¹Ten wyznacznik nazywamy Wrońskianem funkcji $f_1, \dots, f_n$. Przydaje się w równaniach różniczkowych.