Algebra liniowa 2 R, Konwersatorium 1 (o ciałach skończonych i nie tylko)

Definicja. *Charakterystyka* ciała to najmniejsza taka dodatnia liczba naturalna n, że $\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}=0$, lub 0, jeśli taka liczba nie istnieje.

Zadanie 1. Uzasadnij, że charakterystyka ciała jest zawsze liczbą pierwszą (w przeciwnym wypadku byłyby dzielniki zera).

Definicja. Niech K będzie ciałem. *(Pod)ciało proste* K to najmniejsze ciało zawarte w K.

Zadanie 2. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem charakterystyki p, to jego ciało proste to $\mathbf{Z}_p$, a jeśli jest ciałem charakterystyki 0, to ciało proste to $\mathbf{Q}$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że jeśli $K \subseteq L$ są ciałami, to L jest przestrzenią liniową nad L.

Zadanie 4. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem skończonym, to jest (w naturalny sposób) przestrzenią liniową nad ciałem o p elementach, gdzie p jest liczbą pierwszą.

Zadanie 5. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że jeśli K jest ciałem skończonym, to jego moc jest potęgą liczby pierwszej.

Zadanie 6. Wyznacz ciało o 4 elementach (znajdź tabelki dodawania i mnożenia).

Definicja. *Pierścien z dzieleniem* to zbiór z działaniami spełniającymi wszystkie aksjomaty ciała prócz przemienności mnożenia (uwaga: niektóre aksjomaty trzeba przez to napisać w dwóch wersjach: lewej i prawej, np. rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Pierścień (z jedynką) to zbiór spełniający te same aksjomaty, co pierścień z dzieleniem, poza istnieniem elementów odwrotnych i aksjomatem $0 \neq 1$.

Na przykład każde ciało jest pierścieniem z dzieleniem, $\mathbf{Z}_n$, $\mathbf{Z}$ to pierścienie, ale nie $\mathbf{N}$ (bo nie ma elementów przeciwnych).

Zadanie 7. Zauważ, że kwaterniony są pierścieniem z dzieleniem, ale nie ciałem (bo mnożenie nie jest przemienne).

Zadanie 8. Uzasadnij, że skończony pierścień przemienny (tzn. taki, że mnożenie jest przemienne), który nie ma dzielników zera, jest ciałem.

$*$ **Zadanie 9.** Uzasadnij, że skończony pierścień, który nie ma dzielników zera, jest ciałem.