Zadanie 1. Rozstrzygnij (z uzasadnieniem), które z podanych zbiorów są ciałami.

a) $\mathbf{Q}$, b) $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, c) $\mathbf{Q}[i]$, d) $\mathbf{Z}$, e) $\mathbf{Z}_n$.

Tu $\mathbf{Z}_n$ to liczby całkowite od 0 do $n-1$ z dodawaniem i mnożeniem modulo n. W pozostałych zbiorach dodajemy i mnożymy jak zwykle w $\mathbf{C}$.

(Możesz założyć bez dowodu, że działania dodawania i mnożenia w $\mathbf{C}$ spełniają oczywiste własności łączności, przemienności i rozdzielności.)

Zadanie 2. Używając jedynie aksjomatów przestrzeni liniowej (i arytmetyki liczb) uzasadnij precyzyjnie, że $5(u+w)+2w=7(u+w)+(-2)u$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem, to elementy odwrotny i przeciwny do danego są jedyne, to znaczy:

a) dla każdych x,y, jeżeli $x+y_1=x+y_2=0$, to $y_1=y_2$,

b) dla każdych x,y, jeżeli $xy_1=xy_2=1$, to $y_1=y_2$.

Zadanie 4. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi (a,b to skalary, v,w – wektory):

a) $-(v-w)=(-v)+w$;

b) $av=0 \iff (a=0 \vee v=0)$;

c) $(a-b)v=av-bv$;

d) $a(-v)=(-a)v=-av$;

e) $av+bw=bv+aw \iff (a=b \vee v=w)$.

Zadanie 5. Znajdź $\mathrm{Lin}((1,2,3)^\top,(4,5,6)^\top)$ w $\mathbf{R}^3$ (opisz ten zbiór równaniem lub układem równań).

Zadanie 6. Odwołując się do wiedzy z I semestru opisz wszystkie podprzestrzenie $\mathbf{R}^3$.

Zadanie 7. Uzasadnij, że jeśli w układzie $v_1,\dots,v_n$ pewne dwa wektory są równe, to układ ten jest lz. Uzasadnij, że jeśli w układzie $v_1,\dots,v_n$ pewien wektor jest równy 0, to układ ten jest lz.

Zadanie 8. Załóżmy że V jest przestrzenią liniową nad ciałem skończonym K o p^k elementach.[1] Niech $v_1,v_2,v_3\in V$ będą liniowo niezależne. Ile elementów ma $\mathrm{Lin}(v_1,v_2,v_3)$?

Zadanie 9. Dla $z\in\mathbf{C}$ spróbuj zdefiniować, czym powinno być $\mathbf{Q}[z]$ (jak wyglądają jego elementy), jeżeli ma być zamknięte na mnożenie i dodawanie, przy założeniu że:

a) $z^3\in\mathbf{Z}$, b) $z^2+z+1=0$, c) z jest dowolna.

Kiedy $\mathbf{Q}[z]$ jest ciałem? Podaj przykład $z\in\mathbf{C}$, dla którego $\mathbf{Q}[z]$ nie jest ciałem.

[1] Można pokazać, że liczba elementów ciała skończonego zawsze jest potęgą liczby pierwszej. Możemy to zrobić na konwersatorium.