Algebra liniowa 2 R, Lista 1

Zadanie 0. Niektóre zera na poprzedniej liście oznaczają wektor zerowy. Znajdź je wszystkie i dorysuj nad nimi strzałki.

Zadanie 1. Wykaż, że w dowolnym ciele zachodzą tożsamości: $(-1)x = -x$, $-(-x) = x$, $(-1)(-1) = 1$, $(-x)y = -xy$, $(x-y)z = xz - yz$, $\frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$ (dla $z \neq 0$), $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$ (dla $x, y \neq 0$), $\frac{z}{x} + \frac{t}{y} = \frac{zy+tx}{xy}$ (dla $x, y \neq 0$), $x - (y - z) = (x - y) - z$.

Zadanie 2. Sprawdź starannie, że przestrzeń $\mathbf{R}^A$ wszystkich funkcji z A w $\mathbf{R}$ jest (z działaniami zadanymi przez $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$, $(\alpha f)(a) = \alpha \cdot f(a)$) przestrzenią liniową.

Zadanie 3. Pokaż że jeżeli $W_1, W_2 \leqslant V$, to $W_1 \cap W_2 \leqslant V$.

Zadanie 4. Wskaż bazę $\mathbf{R}_3[X]$ do której należą wielomiany $1 + X^2, 1 + 2X + X^3$.

Zadanie 5. Sprawdź ze jeżeli $A, B \subseteq V$ są rozłączne i $A \cup B$ jest lnz, to $\operatorname{Lin} A \cap \operatorname{Lin} B = \{0\}$.

Zadanie 6. Podaj przykład trójki $V_1, V_2 < W$, takiej że ani $V_1 \cup V_2$, ani $V_1 \setminus V_2$ nie jest podprzestrzenią W.

Zadanie 7. Dla dowolnych podzbiorów W_1, W_2 przestrzeni liniowej V, uzasadnij że:
- a) jeżeli $W_2 \leqslant V$ i $W_1 \leqslant W_2$, to $W_1 \leqslant V$,
- b) jeżeli $W_1, W_2 \leqslant V$ i $W_1 \subseteq W_2$, to $W_1 \leqslant W_2$.

Zadanie 8. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami:
- a) $C(\mathbf{R})$: $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid f(7) = 0\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid f(12) \geq f(-12)\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) \mid (\forall x \in \mathbf{R})(f'(x) \geq 0)\}$, $\{f \in C^1(\mathbf{R}) \mid (\forall x \in \mathbf{R})(3f'(x) + x^2 f(x) = 0)\}$;
- b) przestrzeni $c = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in \mathbf{R}\}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych: $\{(a_n) \mid (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = a_{n+1} - 3a_n)\}$, $\{(a_n) \mid a_{17} + a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) \mid a_{17} = a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) \mid a_5 + a_7 + a_{15} = 0\}$;
- c) $\mathbf{R}^3$ – podzbiory określone przez równania: $z^2 = x^2 + 2y^2$, $x + y + 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;
- d) przestrzeni wielomianów $\mathbf{R}[X]$: wielomiany stopnia 7, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(2) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P''(-1) + P(4) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P''(2) + P(0)^2 = 0\}$,

Zadanie 9. Uzasadnij lub obal (A, B to dowolne podzbiory dowolnej przestrzeni liniowej): $\operatorname{Lin}(A \cup B) = \operatorname{Lin}(A) + \operatorname{Lin}(B)$, $\operatorname{Lin}(A \cap B) = \operatorname{Lin}(A) \cap \operatorname{Lin}(B)$, $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Lin}(A) \subseteq \operatorname{Lin}(B)$. (Tu + oznacza sumę kompleksową!)

Zadanie 10. Uzasadnij, że jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są lnz, a v_{n+1} nie jest ich kombinacją liniową, to $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ są lnz. Czy jest też odwrotnie?

Zadanie 11. Wskaż możliwie duży liniowo niezależny podzbiór przestrzeni $V = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(-1) = 0\}$.

Zadanie 12. W zbiorze $A = \{(0,0,0,0)^\top, (1,0,1,0)^\top, (1,2,1,3)^\top, (2,2,2,3)^\top, (0,0,0,1)^\top\}$ wskaż podzbiór, który jest bazą $\operatorname{Lin}(A)$ (rzecz dzieje się w $\mathbf{R}^4$).

Zadanie 13. Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathbf{R}^5$ zadanej układem równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

(Uzasadnij, że jest to naprawdę baza.)

Zadanie 14.
- a) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) \neq 0$.
- b) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) = 0$, ale $P(2) \neq 0$.
- c) Znajdź $P \in \mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1) = P(2) = 0$, ale $P'''(0) \neq 0$.
- d) Wywnioskuj, że $\dim\{P \in \mathbf{R}_5[X] \mid P'(-1) = P(2) = P'''(0) = 0\} \leq 3$.

Zadanie 15. Uzasadnij, że jeśli 3-elementowy zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą V, to również $\{u+v, u+2v+w, w\}$ jest bazą V.

Zadanie 16. Uzasadnij że jeżeli $(K, +, \cdot, 0, 1)$ spełnia wszystkie aksjomaty ciała, poza tym że $0 = 1$, to K ma dokładnie jeden element. Następnie zastanów się, czy naprawdę potrzeba do tego wszystkich aksjomatów ciała.

Zadanie 17. Uzasadnij, że wielomian o współczynnikach rzeczywistych, który ma przynajmniej jeden niezerowy współczynnik, nie zadaje funkcji zerowej. Wywnioskuj stąd, że różne wielomiany zadają różne funkcje wielomianowe $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Czy to jest prawdą dla innych ciał, zamiast $\mathbf{R}$?

Zadanie 18. Dla $V = \mathbf{R}^2$ stwierdź, jak duży (jakiej mocy) jest zbiór P, o którym mowa w dowodzie istnienia bazy. Jak długi może być łańcuch w $(P, \subseteq)$ w tym przypadku? Uzasadnij, że $\mathbf{R}^2$ ma bazę, w możliwie łatwy sposób.

Zadanie 19. Niech $V = \mathbf{R}_3[X]$, $A = \{1+X-X^2-X^3, 1+2X^2-3X^3, X-2X^2+X^3\}$. Spróbuj możliwie prosto opisać $\mathrm{Lin}(A)$: podaj warunek, pozwalający łatwo stwierdzić dla danych a, b, c, d, czy wielomian $aX^3 + bX^2 + cX + d$ należy do $\mathrm{Lin}(A)$. Przetestuj swój warunek na wielomianach $5X^3 + 4X - 8$, $X^2 + 2X - 3$.

Zadanie 20. Udowodnij, że B jest bazą przestrzeni liniowej V wtedy i tylko wtedy, gdy jest minimalnym podzbiorem V liniowo generującym V. [Bardziej symbolicznie, udowodnij że:B jest bazą $V \iff (B \subseteq V) \wedge \big((\forall C \subseteq V)((\mathrm{Lin}(C) = V \wedge C \subseteq B) \Rightarrow (C = B))\big)$.]