

Zadanie 1. Niech $F : \mathbf{R}^{100} \rightarrow \mathbf{R}^7$ będzie przekształceniem liniowym. Jaki może być wymiar $\ker(F)$? Jaki może być wymiar $\text{im}(F)$? A jak będzie dla $F : \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}^{100}$?

Zadanie 2. Wyznacz bazę i wymiar $\text{Lin}(A)$ dla:

- a) $A = \{(1, 0, 0, -1)^\top, (2, 1, 1, 0)^\top, (1, 1, 1, 1)^\top, (1, 2, 3, 4)^\top, (0, 1, 2, 3)^\top\}$
 b) $A = \{(1, 1, 1, 1, 0)^\top, (1, 1, -1, -1, -1)^\top, (2, 2, 0, 0, -1)^\top, (1, 1, 5, 5, 2)^\top, (1, -1, -1, 0, 0)^\top\}$.

Zadanie 3. Załóżmy, że $\varphi : V \rightarrow W$ jest izomorfizmem liniowym. Pokaż, że

- a) U jest k -wymiarową podprzestrzenią $V \iff \varphi[U]$ jest k -wymiarową podprzestrzenią W .
 b) v_1, \dots, v_k są lnz $\iff \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ są lnz.
 c) $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) = U \iff \text{Lin}(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)) = \varphi[U]$.
 d) zachodzą inne podobne własności – aż Ci się znudzi.

Zadanie 4. Stosując algorytm Steinitza dokonaj wymiany dla bazy $(1, 0, 0)^\top, (1, 1, 0)^\top, (1, 1, 1)^\top$ i liniowo niezależnego podzbioru $(0, 0, 1)^\top, (0, 1, 1)^\top$ przestrzeni \mathbf{R}^3 .

Zadanie 5. Uzasadnij, że jeśli (b_1, \dots, b_n) jest bazą V zaś $a = 0 \cdot b_1 + \sum_{i=2}^n t_i b_i$, to (a, b_2, \dots, b_n) nie jest bazą V .

Zadanie 6. Sprawdź że złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 7. Sprawdź że jeżeli $F : V \rightarrow W$ jest liniowe, to F jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy istnieje takie liniowe $G : W \rightarrow V$, że $F \circ G = \text{id}_W$ i $G \circ F = \text{id}_V$.

Zadanie 8. Wyznacz (pewną) bazę i wymiar następujących podprzestrzeni \mathbf{R}^3 :

- a) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 c) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ d) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 e) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ f) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$
 g) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cap \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ h) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 i) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ j) $\text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cap \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Zadanie 9. Flagą w przestrzeni liniowej V nazywamy ciąg (V_0, V_1, \dots, V_k) podprzestrzeni V , taki że $V_i \subseteq V_{i+1}$. Udowodnij, że wymiar V jest o 1 mniejszy od maksymalnej możliwej długości flagi w V . (Zakładamy, że wymiar V jest skończony.)

Zadanie 10. Znajdź wymiar przestrzeni $\{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(1) = P(-1) = 2P(0) + P''(0) = 0\}$.

Zadanie 11. Napisz jawnym wzorem izomorfizm $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow V$, dla

- a) $V = \{(x, y, z, t)^\top \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y + z + 3t = 0\}$;
 b) $V = \{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P''(0) = P(1) = 0\}$.

W przypadku b) oblicz $F^{-1}(X - X^3)$.

Algebra liniowa 2 R. Lista 2

Zadanie 12. Załóżmy, że $\dim(V) = n$, $W \leq V$, $\dim(W) = k$. Uzasadnij, że istnieje izomorfizm $F: V \rightarrow K^n$, taki że $F[W] = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T \mid x_1, \dots, x_k \in K\}$. Napisz taki izomorfizm wzorem dla $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in V \mid P'(1) + P(0) = 0\}$.

Zadanie 13. Podaj przykład 4-elementowego podzbioru \mathbf{R}^3 , w którym zawarte są jedynie (dokładnie) 3 bazy \mathbf{R}^3 .

Zadanie 14. Podaj przykład dwóch baz (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) przestrzeni \mathbf{R}^3 , takich że (a_1, b_2, b_3) jest bazą \mathbf{R}^3 , ale (b_1, a_2, a_3) nie jest bazą \mathbf{R}^3 .

Zadanie 15. Czy prawdą jest, że jeśli $B = (b, b_2, b_3)$ i $C = (c, b_2, b_3)$ są bazami $\mathbf{R}_2[X]$, to dla dowolnego $P \in \mathbf{R}_2[X]$ wektory $[P]_B$ i $[P]_C$ mogą się różnić tylko pierwszą współrzędną?

Zadanie 16. Sprawdź, że $B = \{1, X - 2, (X - 2)^2, \dots, (X - 2)^n\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}_n[X]$; znajdź wzór na $[P]_B$.

Zadanie 17. Uzasadnij, że $\dim \text{Lin}(B) \leq |B|$. Czy prawdą jest, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy B jest lnz?

Zadanie 18. Udowodnij, że

- przekształcenie identycznościowe jest izomorfizmem liniowym;
- przekształcenie odwrotne do izomorfizmu liniowego jest izomorfizmem liniowym;
- złożenie izomorfizmów liniowych jest izomorfizmem liniowym.

Sformułuj konkluzję tego zadania używając słowa „relacja”.

Zadanie 19. Z twierdzenia Bezouta wywnioskuj, że jeśli wielomian stopnia ≤ 13 zeruje się w $1, 2, 3, \dots, 14$, to musi on być wielomianem zerowym. Używając tw. o indeksie wywnioskuj stąd, że dla dowolnych liczb a_1, a_2, \dots, a_{14} istnieje (jedyne) wielomian P stopnia ≤ 13 taki że $P(1) = a_1, P(2) = a_2, \dots, P(14) = a_{14}$. [Zdefiniuj odpowiednie przekształcenie liniowe z $\mathbf{R}_{13}[X]$ w \mathbf{R}^{14} .]

Zadanie 20. Czy jest prawdą, że w dowolnej przestrzeni liniowej, dla dowolnych jej podprzestrzeni liniowych U, V, W zachodzi $U \cap (V + W) = U \cap V + U \cap W$?

Zadanie 21. Nie używając całkowania sprawdź, czy są liniowo niezależne następujące podzbiory przestrzeni funkcji z \mathbf{R} w \mathbf{R} : a) $\{\sin x, \cos x\}$; b) $\{1, \cos(2x), \cos^2 x\}$; c) $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$.

Zadanie 22. Oblicz $\dim\{(a_n)_{n=0}^\infty \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \mid (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n)\}$.

Zadanie 23. Uzasadnij, że jeśli V i W są podprzestrzeniami pewnej (skończenie wymiarowej) przestrzeni liniowej, to $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$. (wsk. Wybierz bazę $V \cap W$; uzupełnij ją do bazy ...). (Ta własność nazywa się *modularnością*.)

Zadanie 24. Ile k -wymiarowych podprzestrzeni ma n -wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem q -elementowym?