Kombinatoryka, lista 1

Jeśli X jest dowolnym zbiorem to przez $\mathcal{P}(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X, czyli *zbiór potęgowy* zbioru X.

Jeśli mamy daną funkcję $f : X \to Y$ to mówimy, że

- f jest *injekcją* jeśli f jest różnowartościowa:

$$\forall_{x_1,x_2 \in X} : \text{ jeśli } x_1 \neq x_2 \text{ to } f(x_1) \neq f(x_2),$$

- f jest *surjekcją* jeśli f jest jest funkcją "na":

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} : f(x) = y,$$

- f jest *bijekcją* jeśli jest jednocześnie injekcją i surjekcją.

1. Mamy dany zbiór X i jego podzbiory A, B, C. Zapisz przy pomocy symboli mnogościowych zbiór elementów:
a) które należą tylko do zbioru C,
b) które należą i do zbioru A i do zbioru B, ale nie należą do zbioru C,
c) które należą do wszystkich trzech zbiorów,
d) które należą do co najmniej jednego z nich,
e) które należą do co najwyżej jednego z nich,
f) które należą do dokładnie jednego z nich,
g) które należą do dokładnie dwóch z nich,
h) które należą do co najwyżej dwóch z nich,
i) które należą do co najmniej dwóch z nich,
j) które nie należą do żadnego z nich.

2. Sformułuj i udowodnij prawa rachunku zdań:

a) dwa prawa de Morgana,

b) prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy,

c) prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji.

3. Sformułuj i udowodnij prawa rachunku zbiorów:

a) dwa prawa de Morgana,

b) prawo rozdzielności iloczynu mnogościowego względem sumy mnogościowej,

c) prawo rozdzielności sumy mnogościowej względem iloczynu mnogościowego.

4. Sformułuj zasadę indukcji matematycznej. Czy potrafisz ją udowodnić?

5. Udowodnij przez indukcję matematyczną następujące wzory:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2,$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

6. *Współczynnik dwumianowy* $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę podzbiorów k-elementowych (czyli *kombinacji* k-elementowych) w zbiorze n-elementowym. Uzasadnij, że

- $\binom{0}{0} = 1$,
- $\binom{n}{0} = 1$ dla $n \geq 1$,
- $\binom{n}{n} = 1$ dla $n \geq 1$,
- jeśli $0 < k < n$ to
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Wypisz na tej podstawie wyrazy $\binom{n}{k}$ dla $0 \leq k \leq n \leq 6$, tak aby wyrazy $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, występowały kolejno w n-tym rzędzie (*trójkąt Pascala*).

7. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi *wzór dwumianowy Newtona:*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k.$$

8. Wyznacz zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X)$ dla $X = \emptyset$, $X = \{1\}$, $X = \{1, 2\}$, $X = \{1, 2, 3\}$.

9. Załóżmy, że X jest dowolnym zbiorem, a f jest dowolną funkcją
$$f : X \to \mathcal{P}(X).$$

Definiujemy zbiór
$$A := \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Udowodnij, że A nie jest w obrazie funkcji f, to znaczy nie istnieje $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = A$.

Wywnioskuj stąd, że nie istnieje surjekcja $f : X \to \mathcal{P}(X)$ (twierdzenie Cantora).

Podaj przykłady takich funkcji i odpowiedniego zbioru A w przypadkach $X = \emptyset$, $X = \{1\}$, $X = \{1, 2\}$, $X = \{1, 2, 3\}$.