Kombinatoryka, lista 2

OEIS–On-Line Encyclopedia of Integer Sequences: https://oeis.org

Ciąg Fibonacciego ($A000045$ w OEIS): $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_n := F_{n-1} + F_{n-1}$ dla $n \geq 2$. Początkowe wyrazy ciągu Fibonacciego:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots,$$

1. Sprawdź, że rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich ciągów $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ spełniających warunek

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{dla } n \geq 2, \tag{1}$$

jest zamknięta na dodawanie i na mnożenie przez liczbę, czyli że jeśli ciągi

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots), \qquad \mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots)$$

należą do $\mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to ciągi

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots),$$
$$\alpha \cdot \mathbf{a} := (\alpha \cdot a_0, \alpha \cdot a_1, \ldots)$$

też należą do $\mathcal{F}$ (to oznacza, że $\mathcal{F}$ jest *przestrzenią liniową* nad $\mathbb{R}$).

2. Dla jakiego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ciąg $a_n = x^n$ należy do rodziny $\mathcal{F}$?

3. Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami *równania charakterystycznego* $x^2 = x + 1$ dla rekurencji (1). Uzasadnij, że każdy ciąg w rodzinie $\mathcal{F}$ jest postaci

$$a_n = \alpha \cdot x_1^n + \beta \cdot x_2^n,$$

gdzie α, β są odpowiedni dobranymi liczbami rzeczywistymi.

4. Korzystając z wyliczonych wartości x_1, x_2 i dobierając odpowiednio α, β przedstaw liczby Fibonacciego w postaci

$$F_n = \alpha \cdot x_1^n + \beta \cdot x_2^n$$

(*wzór Bineta*).

5. Wylicz podobny wzór dla *liczb Lukasa* zadanych rekurencją: $L_0 := 2$, $L_1 := 1$,

$$L_n := L_{n-1} + L_{n-2} \qquad \text{dla } n \geq 2.$$

Początkowe wyrazy ciągu Lukasa ($A000032$ w OEIS):

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, \ldots.$$

6. Czy można rozszerzyć ciąg Fibonacciego na liczby całkowite, to znaczy zdefiniować F_n dla $n \in \mathbb{Z}$ tak, że $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ oraz żeby równość $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ była spełniona dla każdego $n \in \mathbb{Z}$? Czy nadal będzie spełniony wzór Bineta?

7. Czy w podobny sposób można rozszerzyć ciąg Lukasa?

8. Podobnie jak w poprzednich zadaniach, wyprowadź wzór Bineta dla ciągu zadanego przez rekurencję: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \qquad \text{dla } n \geq 2.$$

9. Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 5$,

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

dla $n \geq 2$.

10. Ciąg a_n zadany jest przez rekurencję: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad \text{dla } n \geq 2.$$

Znajdź i udowodnij wzór ogólny na wyraz a_n.

11. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich ciągów $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ spełniających warunek

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \qquad \text{dla } n \geq 2.$$

Udowodnij, że ciągi $a_n := 3^n$ i $b_n := n \cdot 3^n$ należą do rodziny $\mathcal{F}$.

12. Wyprowadź wzór na n-ty wyraz ciągu a_n, który jest zdefiniowany rekurencyjnie: $a_0 := 1$, $a_1 := 5$ oraz

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \qquad \text{dla } n \geq 2.$$

13. Wzorując się na poprzednich przykładach, wyprowadź wzór na n-ty wyraz ciągu a_n zadanego rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 8$,

$$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3},$$

dla $n \geq 3$.

14. Wyprowadź wzór na n-ty wyraz ciągu a_n zadanego rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$,

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3},$$

dla $n \geq 3$.