

Podzielność

1. Uzasadnij, że w pierścieniu $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (z działaniami po współrzędnych) element $(1, 0)$ nie jest jednostką i nie rozkłada się na iloczyn elementów nierozkładalnych.
2. Uzasadnij, że w pierścieniu UFD istnieje największy wspólny dzielnik. Zdefiniuj najmniejszą wspólną wielokrotność; wykaż że w pierścieniu UFD ona istnieje i jest jednoznaczna z dokładnością do stowarzyszenia.
3. Niech $a, b \in \mathbf{Z}$. Udowodnij, że $a|b$ w $\mathbf{Z} \iff a|b$ w $\mathbf{Z}[i]$.
4. Uzasadnij, że największy wspólny dzielnik wielomianów $P(X), Q(X) \in \mathbf{Q}[X]$ jest w $\mathbf{Q}[X]$ taki sam jak w $\mathbf{C}[X]$.
5. Udowodnij, że jeśli $P(X)$ jest nierozkładalnym elementem $\mathbf{Q}[X]$, to $P(X)$ nie ma wielokrotnych pierwiastków zespolonych. (Wsk. $(P(X), P'(X))$).
6. Wykaż, że jeśli $P, Q \in \mathbf{C}[X, Y]$ mają wspólny czynnik w $\mathbf{C}(X)[Y]$, to mają też wspólny czynnik w $\mathbf{C}[X, Y]$.
7. Sprawdź, że ciało ułamków dziedziny jest ciałem.
8. Sprawdź, że jeśli K jest ciałem, to naturalny monomorfizm $K \rightarrow K_0$ jest izomorfizmem.
9. Wyznacz ciało ułamków pierścienia $K[[X]]$.

Ideały

10. Wykaż, że
 - a) przeciwobraz ideału przez homomorfizm pierścieni jest ideałem;
 - a) obraz ideału przez epimorfizm pierścieni jest ideałem.
11. Udowodnij (np. używając lematu Kuratowskiego–Zorna), że w niezerowym pierścieniu:
 - a) istnieje ideał maksymalny;
 - b) każdy element niebędący jednostką leży w pewnym ideale maksymalnym;
 - c) każdy ideał jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym.

Przekrój wszystkich ideałów maksymalnych pierścienia R jest nazywany jego *radykałem Jacobsona* i oznaczany $J(R)$.

12. Udowodnij, że $x \in J(R) \iff (\forall y \in R)(1 - xy \in \mathcal{U}(R))$.
13. Udowodnij, że radykał Jacobsona pierścienia ilorazowego $R/J(R)$ jest trywialny.
14. Element pierścienia nazywamy *nilpotentnym*, jeśli pewna jego potęga jest równa 0. Udowodnij, że zbiór wszystkich nilpotentnych elementów pierścienia jest jego ideałem (zwanym *nilradykałem*).
15. Niech S będzie podzbiorem pierścienia R zamkniętym na mnożenie. Załóżmy, że $0 \notin S$. Udowodnij, w rodzinie ideałów R rozłącznych z S istnieje (zapewne niejedyny) element maksymalny (ze względu na zawieranie). Uzasadnij, że każdy maksymalny element tej rodziny jest ideałem pierwszym.
16. Udowodnij, że nilradykał jest równy przekrojowi wszystkich ideałów pierwszych pierścienia.
17. Udowodnij, że w ilorazie pierścienia przez jego nilradykał nie ma niezerowych elementów nilpotentnych.

Pierścienie kwadratowe

Przypomnienie: d jest liczbą całkowitą bezkwadratową, $\omega_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ jeśli $d \equiv 1 \pmod{4}$, $\omega_d = \sqrt{d}$ w przeciwnym przypadku.

18. Zbadaj, dla jakich $d < 0$ pierścień $\mathbf{Z}[\omega_d]$ jest euklidesowy względem normy $z \mapsto N(z)$.
19. Zbadaj, dla jakich $d > 0$ pierścień $\mathbf{Z}[\omega_d]$ jest euklidesowy względem normy $z \mapsto |N(z)|$. Pełna lista jest trudna do uzyskania; postaraj się znaleźć więcej przykładów niż znalazłeś dla ujemnych d .
20. Opisz i narysuj ideały pierścienia $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ odpowiadające idealnym czynnikom liczby 2. (Inaczej mówiąc, chodzi o ideały maksymalne zawierające ideał główny (2) .)
21. Udowodnij, że każdy ideał pierścienia $\mathbf{Z}[\omega_d]$ jest postaci $\mathbf{Z}n + \mathbf{Z}(a + b\omega_d)$ dla pewnych $n, a, b \in \mathbf{Z}$.
22. Zbadaj elementy nierozkładalne pierścienia Gaussa $\mathbf{Z}[i]$ (który jest UFD):

- a) Uzasadnij, że każdy taki element dzieli pewną całkowitą liczbę pierwszą.
 - b) Znajdź dzielniki liczby 2.
 - c) Niech $p = 4k + 3$ będzie liczbą pierwszą. Uzasadnij, że p jest nierozkładalna w $\mathbf{Z}[i]$.
- Niech teraz $p = 4k + 1$ będzie nieparzystą liczbą pierwszą.
- d) Uzasadnij, że $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$.
 - e) Uzasadnij, że $p \mid n^2 + 1$ dla pewnego $n \in \mathbf{Z}$.
 - f) Pokaż, że p rozkłada się w $\mathbf{Z}[i]$ na iloczyn dwóch czynników nierozkładalnych. (Wsk. Użyj wzoru $n^2 + 1 = (n + i)(n - i)$.)
 - g) Uzasadnij, że te dwa czynniki liczby p nie są ze sobą stowarzyszone.
 - d) Pokaż, że $p = a^2 + b^2$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{Z}$.
23. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $4k + 3$. Uzasadnij, że $\mathbf{Z}[i]/(p)$ jest ciałem p^2 -elementowym.
24. Rozwiąż w $\mathbf{Z}$ równanie $x^3 = y^2 + 1$ rozkładając prawą stronę w $\mathbf{Z}[i]$.
25. Które liczby całkowite są sumami dwóch kwadratów? Odpowiedz w terminach rozkładu na czynniki pierwsze.