Algebra ISIM 2. Lista 10

Ćwiczenia

1. Uzasadnij, że jeśli moduł (lub ideał) jest skończenie generowany, to z dowolnego zbioru jego generatorów można wybrać skończony zbiór generatorów.
2. Niech $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subseteq I \lhd K[X_1, \dots, X_n]$. Udowodnij równoważność warunków:
   a) $(\forall f \in I)(\exists a_1, \dots, a_k \in K)(LT(f) = \sum_i a_i LT(g_i))$.
   b) $(\forall f \in I)(\exists g \in G)(LT(g)|LT(f))$.
3. Załóżmy, że $P, f_1, \dots, f_k \in K[X_1, \dots, X_n]$ są jednorodne, i że dla pewnych $c_1, \dots, c_k \in K[X_1, \dots, X_n]$ mamy $P = \sum_i c_i f_i$. Uzasadnij, że dla pewnych jednorodnych $d_1, \dots, d_k \in K[X_1, \dots, X_n]$ mamy $P = \sum_i d_i f_i$.
4. Pokaż, że dobry porządek na $\mathbf{N}^n$ spełniający warunek $(\alpha > \beta) \Rightarrow (\alpha + \gamma > \beta + \gamma)$ spełnia też $\alpha \geq 0$.
5. Uzasadnij, że lex, grlex i grevlex są dobrymi porządkami. Zapisz wielomian $4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2$ w postaciach monotonicznych względem tych porządków.
6. (lex) Używając algorytmu Buchbergera wyznacz bazę Groebnera ideału $(xy + 1, y^2 - 1)$.
7. (lex, grlex) Wyznacz bazę Groebnera ideału $(x^2y - 1, xy^2 - x)$.
8 Czy $x^3 + x + 1 \in (xz, xy - z, yz - x)$?
9. Znajdź wielomian P dwóch zmiennych, taki że $x^5 + y^5 = P(x + y, xy)$.

Zadania

10. Udowodnij, że jeśli R jest noetherowski, to $R[[X]]$ też jest noetherowski.
11. Podaj przykład porządku jednomianowego i wielomianów f, f_1, f_2 dwóch zmiennych, takich że: reszta z dzielenia f przez f_1, f_2 jest niezerowa; reszta z dzielenia f przez f_2, f_1 jest niezerowa; ale $f \in (f_1, f_2)$.
12. Udowodnij, że każdy wielomian symetryczny zmiennych $X_1, \dots, X_n$ wyraża się wielomianowo przez $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, gdzie $\sigma_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_k}$.
13. Udowodnij, że jeśli skończony układ wielomianów G spełnia warunek: $(f \in (G)) \Rightarrow (f \bmod G = 0)$, to G jest bazą Groebnera ideału (G).
14. Ja mają się do siebie wielomiany $S(X^\alpha f, X^\beta g)$ i $S(f, g)$?
15. Podaj przykład porządku jednomianowego innego niż lex, grlex i grevlex.
16. Niech G i H będą dwom różnymi bazami Groebnera tego samego ideału I. Udowodnij, że dla każdego wielomianu f mamy $f \bmod G = f \bmod H$.
17. Lemat Dicksona.
   a) Niech $I = (X^\alpha \mid \alpha \in A)$ będzie ideałem generowanym przez zbiór jednomianów. Uzasadnij, że istnieje skończony $C \subseteq A$, taki że $(X^\beta \in I) \iff (\exists \gamma \in C)(X^\gamma | X^\beta)$.
   b) Niech $A \subseteq \mathbf{N}^n$. Uzasadnij, że istnieje skończony $C \subseteq A$, taki że

$$(\forall \alpha \in A)(\exists \gamma \in C)(\exists \delta \in \mathbf{N}^n)(\alpha = \gamma + \delta).$$

Bazę Groebnera nazywamy *minimalną,* jeśli wyrazy wiodące jej elementów są postaci X^α (ze współczynnikiem 1), i jeśli żaden z tych wyrazów wiodących nie dzieli się przez żaden inny. Baza Groebnera jest *zredukowana,* jeśli jest minimalna i żaden wyraz żadnego jej elementu nie dzieli się przez żaden wyraz wiodący innego jej elementu.

18. Bazy Groebnera są dobre, ale niektóre z nich są lepsze.
   a) Udowodnij, że każdy ideał $K[X_1, \dots, X_n]$ ma minimalną bazę Groebnera.
   b) Udowodnij, że zbiór wyrazów wiodących minimalnej bazy Groebnera ideału I zależy tylko od I (a nie od wyboru bazy minimalnej).
   c) Udowodnij, że każdy ideał $K[X_1, \dots, X_n]$ ma zredukowaną bazę Groebnera.
   d) Udowodnij, że każdy ideał $K[X_1, \dots, X_n]$ ma jedyną zredukowaną bazę Groebnera. Opisz jak ją otrzymać z układu generatorów ideału.

19. Niech $f_1, \ldots, f_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$ i niech $I = (f_1, \ldots, f_n)$. Uzasadnij, że $I = K[X_1, \ldots, X_n] \iff$ zredukowana baza Groebnera I to (1).

Przekrój ideałów

20. Niech $I \triangleleft K[X_1, \ldots, X_n]$, niech G będzie bazą Groebnera I względem porządku leksykograficznego ($X_1 > X_2 > \ldots > X_n$), i niech $I_\ell = I \cap K[X_{\ell+1}, \ldots, X_n]$. Uzasadnij, że $G \cap K[X_{\ell+1}, \ldots, X_n]$ jest bazą Groebnera I_ℓ.
21. Niech $I, J \triangleleft K[X_1, \ldots, X_n]$. Uzasadnij, że $I \cap J = (TI + (1-T)J) \cap K[X_1, \ldots, X_n]$. ($T$ to nowa zmienna.)
22. Używając dwóch poprzednich zadań opisz jak znaleźć zbiór generatorów $I \cap J$ mając dane zbiory generujące I oraz J.

Nullstellensatz

K-ciało algebraicznie domknięte. Przez zbiór algebraiczny rozumiemy zbiór algebraiczny w K^n.

23. Udowodnij, że ciało skończone nie jest algebraicznie domknięte. Wsk. Używając cykliczności grupy multyplikatywnej pokaż, że dla odpowiednio dobranego ℓ wielomian $(X^\ell - 1)/(X-1)$ nie ma pierwiastka w K.
24. Niech $f, f_1, \ldots, f_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Udowodnij, że $f \in \sqrt{(f_1 \ldots, f_k)} \iff 1 \in (f_1, \ldots, f_k, 1 - Yf)$ w $K[X_1, \ldots, X_n, Y]$.
25. Niech V, W będą zbiorami algebraicznymi. Uzasadnij, że:
    a) $I(V \cap W) = \sqrt{I(V) + I(W)}$;
    b) $I(V \cup W) = I(V) \cap I(W)$.

Zbiór algebraiczny jest *rozkładalny,* jeśli jest sumą dwóch mniejszych zbiorów algebraicznych (niekoniecznie rozłącznych).

26. Podaj przykład
    a) zbioru algebraicznego rozkładalnego na nierozłączne składniki;
    b) niejednopunktowego zbioru algebraicznego nierozkładalnego.
27. Uzasadnij, że zbiór algebraiczny jest sumą skończenie wielu nierozkładalnych zbiorów algebraicznych.
28. Uzasadnij, że zbiór algebraiczny V jest nierozkładalny $\iff$ $I(V)$ jest ideałem pierwszym.
29. Udowodnij, że ideał radykalny pierścienia $K[X_1, \ldots, X_n]$ jest przekrojem skończenie wielu ideałów pierwszych.
30. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną (lub, jeśli wolisz, domkniętym i ograniczonym podzbiorem $\mathbf{R}^n$). Niech $C(X)$ oznacza pierścień ciągłych funkcji na X o wartościach rzeczywistych.
    a) Uzasadnij, że dla każdego $x \in X$ ideał $m_x = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$ jest maksymalnym ideałem $C(X)$.
    b) Uzasadnij, że każdy ideał maksymalny $C(X)$ jest postaci opisanej w a).