

**Moduły nad PID**

- Niech  $R = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ ciągła i } f(0) = f(1)\}$ , i niech  $M = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ ciągła i } f(0) = -f(1)\}$ .
  - Uzasadnij, że  $M$  jest skończenie generowanym  $R$ -modułem, ale nie jest  $R$ -modułem cyklicznym.
  - Uzasadnij izomorficzność  $R$ -modułów:  $M \oplus M \simeq R \oplus R$ .
  - Skonstruuj epimorfizm  $R$ -modułów  $R \oplus R \rightarrow M$  i opisz jego jądro (stwierdź, czy jest izomorficzne z  $R$  czy z  $M$ ).
- Uzasadnij, że każdy moduł nad  $K[t]$  można opisać jako przestrzeń liniową z endomorfizmem.
- Udowodnij, że moduł jest noetherowski wtedy i tylko wtedy, gdy każda niepusta rodzina jego podmodułów ma element maksymalny (ze względu na inkluzję).

Na wykładzie udowodniliśmy tw. o klasyfikacji skończenie generowanych modułów dla pierścieni Euklidesowych. Naprawdę zachodzi ono dla PID; kolejne zadanie opisuje adaptację dowodu do tego ogólniejszego przypadku.

- Niech  $R$  będzie PID, i niech  $A \in M_{n \times k}(R)$ . Niech też  $N = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$  będzie podmodułem  $R^n$  generowanym przez kolumny  $A$ . Interesuje nas moduł ilorazowy  $M = R^n/N$ .
  - Uzasadnij, że jeśli  $ad - bc = 1$  ( $a, b, c, d \in R$ ), to zamiana w macierzy  $A$  kolumn  $A_i$  oraz  $A_j$  na wektory  $aA_i + bA_j$ ,  $cA_i + dA_j$  nie zmienia modułu  $N$ .
  - Uzasadnij, że analogiczna jak w a) operacja na wierszach nie zmienia klasy izomorfizmu modułu  $M$ .
  - Rozszyfruj, co może znaczyć  $(a, b) = ((a, b))$ ; udowodnij, że to prawda (w PID).
  - Uzasadnij, że jeśli  $(x, y) = z$ , to  $z = ax + by$  dla pewnych  $a, b \in R$ . Uzasadnij, że wtedy  $(a, b) = 1$ , a więc istnieją  $c, d \in R$ , takie że  $ad - cb = 1$ .
  - Używając operacji z a) i b) przerób dowód z wykładu na przypadek PID.
  - Uzasadnij, że jeśli  $d = pq$ ,  $(p, q) = 1$ , to  $R/(d) \simeq R/(p) \oplus R/(q)$  (zaobserwuj, że w obliczu d) dowód z wykładu działa dla PID).
- Uzasadnij, że podmoduł modułu wolnego  $R^n$  nad pierścieniem  $R$  spełniającym warunek PID jest modułem wolnym i ma bazę złożoną z nie więcej niż  $n$  elementów.
- Opisz moduły skończenie generowane nad pierścieniem Gaussa:
  - Uzasadnij, że moduł  $M$  nad  $\mathbf{Z}[i]$  to grupa abelowa z automorfizmem  $\phi$  spełniającym warunek  $(\forall x \in M)(x + \phi(x) = 0)$ .
  - Opisz możliwie konkretnie moduły cykliczne postaci  $\mathbf{Z}[i]/(p^n)$  dla  $p$  pierwszych w  $\mathbf{Z}[i]$ .

**Postać Jordana**

Endomorfizm przestrzeni liniowej nazywamy *nilpotentnym*, jeśli pewna jego potęga jest przekształceniem zerowym. Np.  $F - \lambda$  ograniczone do  $V^\lambda$  jest nilpotentne.

- Założmy, że  $N: V \rightarrow V$  jest nilpotentne, a  $v \in V$  spełnia  $N^k v \neq 0$ . Wykaż, że  $(v, Nv, N^2v, \dots, N^k v)$  jest wtedy liniowo niezależnym układem wektorów.
- Niech  $N: V \rightarrow V$  będzie nilpotentne. Niech

$$\ker(N) \cap \operatorname{Im}(N^k) = (\ker(N) \cap \operatorname{Im}(N^{k+1})) \oplus R_k,$$

i niech  $B_k$  będzie bazą  $R_k$ . Dla każdego  $v \in B_k$  wybierzmy  $u \in V$  spełniający  $N^k u = v$ ; niech  $B(v) = \{u, Nu, \dots, N^k u\}$ . Udowodnij, że suma zbiorów  $B(v)$  (po wszystkich  $k$  i wszystkich  $v \in B_k$ ) jest bazą  $V$ .

- Znajdź postacie Jordana i bazy jordanowskie dla macierzy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sprawdź, że przekształcenie  $\mathbf{R}_n[X] \ni P \mapsto P' \in \mathbf{R}_n[X]$  jest nilpotentne. Wyznacz jego postać Jordana i bazę jordanowską.

11. W turnieju tenisowym bierze udział 8 zawodników o numerach startowych od 1 do 8. Turniej jest rozgrywany systemem pucharowym. Po turnieju zdefiniowano macierz  $A \in M_{8 \times 8}(\mathbf{R})$ :  $a_{ij} = 1$  jeśli  $i$ -ty zawodnik grał i wygrał z  $j$ -tym;  $a_{ij} = 0$  w przeciwnym wypadku. Uzasadnij, że macierz  $A$  jest nilpotentna i wyznacz jej postać Jordana.
12. Uzasadnij, że jeśli  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$  spełnia  $A^{10000} = 0$ , to również  $A^n = 0$ .
13. Uzasadnij, że jeśli  $\chi_F(x) = (-x)^n$ , to  $F$  jest nilpotentne.
14. Znajdź postacie Jordana (najlepiej nie wyznaczając baz jordanowskich) dla macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Wyznacz: przestrzenie własne; przestrzenie pierwiastkowe; postacie Jordana; bazy jordanowskie – dla odwzorowań  $F_A$ ,  $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

16. Znajdź postać Jordana macierzy  $A$ , wiedząc że  $\chi_A(x) = (3 - x)^4(2 + x)$ ,  $\text{rzęd}(A - 3I) = 2$ . Czy da się to zrobić, jeśli  $\text{rzęd}(A - 3I) = 1, 3, 4$ ?
17. Co wiadomo o postaci Jordana zespolonej macierzy  $A$ , jeśli: (a)  $A^2 = I$ ; (b)  $A^2 = A$ ; (c)  $A^2 = A^3$
18. Udowodnij, że jeśli  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ ,  $A^N = I$ , to  $A$  jest diagonalizowalna, a jej wartości własne są pierwiastkami z jedynki stopnia  $N$ .
19. Z twierdzenia Jordana wywnioskuj, że dla  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$  zachodzi  $\chi_A(A) = 0$ .  
[Ten fakt znany jest jako tw. Cayley’a–Hamiltona i jest prawdziwy nad dowolnym ciałem.]
20. Niech  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ . Udowodnij, że  $A^n = 0 \iff \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0$ .
21. Niech  $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ . Udowodnij, że istnieje odwracalna  $P \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ , taka że  $A^\top = PAP^{-1}$ .
22. Wyprowadź wzór na  $n$ -tą potęgę klatki Jordana.