

Ćwiczenia

- Niech R będzie pierścieniem, S jego mnożącym podzbiorem, zaś M niech będzie R -modułem. Sprawdź, że $S^{-1}R$ jest pierścieniem, i że $S^{-1}M$ jest $S^{-1}R$ -modułem.
- Sprawdź, że pierścień szeregów formalnych $K[[X]]$ jest lokalny.
- Niech R będzie dziedziną, zaś S jej podzbiorem mnożącym. Zrealizuj $S^{-1}R$ jako podpierścień ciała ułamków R_0 .
- Rozważmy $\mathbf{Q}$ jako moduł nad $\mathbf{Z}$. Uzasadnij, że
 - nie jest on skończenie generowany;
 - dla każdego pierwszego $p \in \mathbf{Z}$ lokalizacja $\mathbf{Q}_{(p)} = \mathbf{Q}$;
 - dla każdego pierwszego $p \in \mathbf{Z}$ mamy $\mathbf{Q}_{(p)}/(p)\mathbf{Q}_{(p)} = 0$. (Mimo to $\mathbf{Q} \neq 0$.)
- W pierścieniu $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ ideał $p = (2, 1 + \sqrt{-5})$ jest niegłównym ideałem maksymalnym. Uzasadnij, że ideał maksymalny pR_p pierścienia R_p jest główny; znajdź jego generator.
- Uzasadnij, że rozszerzenie $K(X)/K$ jest przestępne.
- Uzasadnij, że liczby zespolone które są algebraiczne nad $\mathbf{Q}$ tworzą przeliczalne i algebraicznie domknięte podciało ciała $\mathbf{C}$.
- Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu $X^3 - 2$ nad $\mathbf{Q}$. Wyznacz $[K : \mathbf{Q}]$.

Zadania

- $(0 \notin S)$ Własność uniwersalna:
 - Uzasadnij, że odwzorowanie lokalizujące $\phi: R \rightarrow S^{-1}R$ ma następującą własność uniwersalną: dla dowolnego homomorfizmu pierścieni $\psi: R \rightarrow A$ spełniającego $\psi(S) \subseteq \mathcal{U}(A)$ istnieje jedyny homomorfizm pierścieni $\Psi: S^{-1}R \rightarrow A$, taki że $\psi = \Psi \circ \phi$.
 - Uzasadnij, że własność z a) charakteryzuje ϕ : jeśli $\phi': R \rightarrow R'$ też ją ma, to istnieje jedyny izomorfizm $\iota: R' \rightarrow S^{-1}R$ taki że $\phi = \iota \circ \phi'$.
- Niech $S = \{1, f, f^2, \dots\} \subseteq R$. Udowodnij, że $S^{-1}R \simeq R[X]/(fX - 1)$.
- Niech $I \triangleleft R$.
 - Uzasadnij, że jeśli ciąg R -modułów $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ jest dokładny, to indukowany ciąg R/I -modułów $A/IA \rightarrow B/IB \rightarrow C/IC \rightarrow 0$ też jest dokładny.
 - Podaj przykład monomorfizmu modułów $A \rightarrow B$, dla którego indukowany homomorfizm $A/IA \rightarrow B/IB$ nie jest monomorfizmem.
- Udowodnij, że lokalizacja pierścienia noetherowskiego jest noetherowska.
- Uzasadnij, że ideał który jest maksymalny wśród ideałów rozłącznych z ustalonym zbiorem mnożącym jest ideałem pierwszym.
- Wskaż naturalną bijekcję między $\text{Spec}(S^{-1}R)$ a $\{P \in \text{Spec}(R) \mid P \cap S = \emptyset\}$.
- Własności lokalne.
 - $(\phi: M \rightarrow N$ - homomorfizm R -modułów.) Pokaż, że $\phi = 0 \iff (\forall m \in \text{Spec}_m(R))(\phi_m: M_m \rightarrow N_m \text{ jest homomorfizmem zerowym})$.
 - $(M$ to R -moduł, $x \in M)$ Pokaż, że $x = 0 \iff (\forall m \in \text{Spec}_m(R))(\frac{x}{1} = 0 \text{ w } M_m)$.
 - $(M$ to R -moduł, a N to jego podmoduł; $x \in M)$ Pokaż, że $x \in N \iff (\forall m \in \text{Spec}_m(R))(\frac{x}{1} \text{ w } M_m \text{ zachodzi } \frac{x}{1} \in N_m)$.
 - $(a, b \in R)$ Pokaż, że $a|b \iff (\forall m \in \text{Spec}_m(R))(\frac{a}{1} | \frac{b}{1} \text{ w } R_m)$.
- Niech R będzie dziedziną. Traktujemy lokalizację R_p jako podpierścień ciała ułamków R_0 . Wykaż, że $\bigcap_{p \in \text{Spec}(R)} R_p = R$.
- Udowodnij, że jeśli $R^n \simeq R^k$, to $n = k$.
- Uzasadnij, że jeśli elementy $x_1, \dots, x_n$ generują R^n , to są wolną bazą tego modułu; innymi słowy, jeśli $\phi: R^n \ni (r_1, \dots, r_n) \mapsto r_1x_1 + \dots + r_nx_n \in R^n$ jest epimorfizmem, to jest izomorfizmem.

- a) Uzasadnij, że istnieje $s: R^n \rightarrow R^n$, takie że $\phi \circ s = Id$.
 - b) Niech $N = \ker \phi$. Uzasadnij, że $R^n = N \oplus \text{Im}(s)$. Wywnioskuj stąd, że N jest skończenie generowanym R -modułem. Uzasadnij też, że $\text{Im}(s) \simeq R^n$.
 - c) Uzasadnij, że wystarczy pokazać tezę dla pierścieni lokalnych.
 - d) W przypadku lokalnym rozkład $R^n = N \oplus \text{Im}(s)$ prowadzi do rozkładu przestrzeni liniowych: $R^n/mR^n = (N/mN) \oplus (\text{Im}(s)/m\text{Im}(s))$. Wywnioskuj $N/mN = 0$, i dalej $N = 0$.
19. W pierścieniu $R = C([-1, 1])$ ciągłych funkcji rzeczywistych na przedziale $[-1, 1]$ definiujemy dwa ideały: $m = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$ oraz $I = \{f \in R \mid (\exists \epsilon > 0)(\forall x \in (-\epsilon, \epsilon))(f(x) = 0)\}$. Udowodnij, że $R_m \simeq R/I$.
20. Niech $R = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ ciągła i } f(0) = f(1)\}$, i niech $M = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ ciągła i } f(0) = -f(1)\}$.
- a) Dla $x \in [0, 1]$ niech $m_x = \{f \in R \mid f(x) = 0\}$. Uzasadnij, że m_x jest ideałem maksymalnym pierścienia R . Uzasadnij, że $m_0 = m_1$, i że $\text{Spec}_m(R) = \{m_x \mid x \in [0, 1]\}$.
 - b) Jak wiemy, R i M nie są izomorficznymi R -modułami. Udowodnij, że mimo to dla dowolnego $m \in \text{Spec}_m(R)$ zachodzi izomorfizm R_m -modułów: $M_m \simeq R_m$.
 - c) Udowodnij, że dla dwóch różnych $m, n \in \text{Spec}_m(R)$ pierścienie R_m i R_n są izomorficzne, ale R -moduły R_m i R_n nie są izomorficzne.