

Ćwiczenia

1. Ile najkrótszych niezerowych wektorów może mieć dyskretna podgrupa $\mathbf{R}^2$?
2. Uzasadnij, że $S_n = \langle (1, 2, \dots, n), (1, 2) \rangle$.
3. Wyznacz parzystość permutacji w terminach jej rozkładu na cykle.
4. Niech $\sigma, \tau \in S_n$. Uzasadnij, że $\sigma\tau$ i $\tau\sigma$ mają rozkłady na cykle tej samej długości.
5. Jaki jest największy możliwy rząd elementu grupy S_7 ?
6. Uzasadnij, że 1000-elementowa podgrupa $SO(3)$ ma podgrupę cykliczną 500-elementową.
7. Uzasadnij, że jeśli $G < I(\mathbf{R}^2)$, to $[G : G \cap I_+(\mathbf{R}^2)] \leq 2$. Uogólnij.
8. Niech $H < G$ będzie podgrupą indeksu 2. Uzasadnij, że: (a) $(\forall g \in G)(gH = Hg)$; (b) $H \triangleleft G$.

Zadania

9. Udowodnij, że dwa cykle w S_n o różnych lecz nierozłącznych nośnikach nie są przemienne.
10. Naczelnik zakładu penitencjarnego z okazji Wielkiego Świąta złożył 100 więźniom następującą propozycję. W pewnym pomieszczeniu ustawione będzie w rzędzie 100 zamkniętych pudełek, a w nich losowo zostaną rozmieszczone karteczki z liczbami od 1 do 100, po jednej w każdym pudełku. Więźniowie po kolei będą wchodzić do tego pomieszczenia. Po wejściu więzień wybiera pudełko, otwiera je i odczytuje karteczkę; potem wybiera inne pudełko, otwiera je i odczytuje karteczkę, itd. Wolno mu otworzyć w sumie 50 pudełek, po czym będzie musiał opuścić pokój, który zostanie następnie przywrócony do stanu sprzed jego wizyty (z tym samym rozmieszczeniem karteczek w pudełkach). Wtedy wejdzie następny z więźniów, itd. Jeśli każdy z więźniów otworzy pudełko ze swoim numerem (więźniowie są oczywiście ponumerowani – liczbami od 1 do 100), to wszyscy odzyskają wolność; w przeciwnym razie wszyscy pozostaną w więzieniu. Więzień po wizycie w pokoju nie ma już kontaktu z innymi więźniami, ale przed rozpoczęciem całej procedury więźniowie mogą się naradzić i ustalić sposób postępowania. Opracuj dla nich strategię z możliwie dużą szansą sukcesu.
11. Udowodnij, że skończona podgrupa F grupy $I(\mathbf{R}^2)$ izometrii płaszczyzny ma punkt stały:
 $(\exists p \in \mathbf{R}^2)(\forall f \in F)(f(p) = p)$. Używając tego faktu wykaż, że:
 a) F jest w $I(\mathbf{R}^2)$ sprzężona z pewną podgrupą grupy $O(2)$ (tj. grupy izometrii trzymających zero).
 b) Jeśli $G < I_+(\mathbf{R}^2)$ jest dyskretna i nieskończona, a $F < G$ skończona, to F ma najwyżej 6 elementów.
12. Opisz skończone podgrupy grupy $O(2)$.
13. Uzasadnij, że orbita działania na $\mathbf{R}^2$ dyskretnej podgrupy $I_+(\mathbf{R}^2)$ nie ma punktów skupienia.
14. Niech G będzie skończoną podgrupą $SO(3)$, składającą się z 24 elementów; załóżmy, że zbiór biegunów G składa się z trzech orbit G , mających 12, 8 i 6 elementów. Udowodnij, że bieguny z orbity 6-elementowej są wierzchołkami ośmiościanu foremnego. Uzasadnij, że G jest grupą obrotów tego ośmiościanu.
15. Niech $G < I_+(\mathbf{R}^3)$ będzie podgrupą dyskretną, do której należą translacje o pewne trzy liniowo niezależne wektory. Uzasadnij, że w G nie ma obrotów o rzędach innych niż 1, 2, 3, 4, 6.
16. Wyznacz 2-podgrupy Sylowa grupy A_5 .
17. Załóżmy, że G ma właściwą podgrupę H skończonego indeksu n . Udowodnij, że wtedy G ma dzielnik normalny indeksu $\leq n!$ zawarty w H . (Wsk. rozważ jądro działania G na zbiorze warstw G/H .)
18. Uzasadnij, że A_n (dla $n \geq 5$) nie ma właściwej podgrupy indeksu $< n$.
19. Udowodnij, że $SL_2(\mathbf{F}_4) \simeq A_5$ używając działania $SL_2(\mathbf{F}_4)$ na zbiorze 1-wymiarowych liniowych podprzestrzeni $\mathbf{F}_4^2$.
20. Znajdź wszystkie izomorfizmy między poniższymi grupami rzędu 120:
 a) S_5 ;
 b) $A_5 \times \mathbf{Z}/2$;
 c) grupa izometrii własnych dwudziestościanu foremnego;
 d) $S_4 \times \mathbf{Z}/5$;
 e) $2\mathbf{I}$; (zdefiniowana tuż po tym zadaniu)

Przypomnienie: dawno temu rozważaliśmy homomorfizm $\pi: \text{Sp}(1) \rightarrow \text{SO}(3)$ przypisujący kwaternionowi q obrót urojonego $\mathbf{R}^3$ dany wzorem $v \mapsto qvq^{-1}$. Jądro π ma 2 elementy: ± 1 . Przy użyciu tego homomorfizmu z grup $\mathbf{T}$, $\mathbf{O}$, $\mathbf{I}$ (tetraedralnej, oktaedralnej i ikosaedralnej – czyli grup obrotów wielościanów foremnych: czworościanu, ośmiościanu i dwudziestościanu) można wytworzyć grupy $2\mathbf{T}$, $2\mathbf{O}$, $2\mathbf{I}$ – binarną tetraedralną, binarną oktaedralną i binarną ikosaedralną, jako przeciwobrazy tych pierwszych w $\text{Sp}(1)$: $2\mathbf{T} = \pi^{-1}(\mathbf{T})$, $2\mathbf{O} = \pi^{-1}(\mathbf{O})$, $2\mathbf{I} = \pi^{-1}(\mathbf{I})$.

-
21. Czy elementy grupy $2\mathbf{T}$ są wierzchołkami czterowymiarowego wielościanu foremnego? A jak jest dla $2\mathbf{O}$? Dla $2\mathbf{I}$?