

1. Sprawdź, że jedynka pierścienia jest jedyna, i że element odwracalny ma jedyny element odwrotny.
2. W  $\mathbf{Z}[i]$  wskaż wszystkie elementy stowarzyszone z  $7 + 2i$ .
3. Czy  $K[[Y]][X] = K[X][[Y]]$ ?
4. Uzasadnij, że  $\mathcal{U}(K[[X]]) = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mid a_0 \neq 0\}$ .
5. Czy każdy niezerowy wielomian jest odwracalny w  $K((X))$ ?
6. Wyznacz  $\mathcal{U}(K((X)))$ .
7. Wyznacz wszystkie (z dokładnością do stowarzyszenia) elementy nierozkładalne pierścienia  $K[[X]]$ . Udowodnij warunek UFD.
8. Wyznacz jednostki i elementy nierozkładalne pierścienia  $\mathbf{Z}_{(p)}$  ( $p$  pierwsza). Udowodnij warunek UFD.
9. Czy każdy element  $K((X))$  jest ilorzem dwóch wielomianów?
10. Czy jest prawdą, że dla dowolnego pierścienia  $R$  zachodzi  $\mathcal{U}(R[X]) = \mathcal{U}(R)$ ?
11. Podaj przykład 10-elementowego pierścienia bez dzielników zera, lub wykaż, że taki pierścień nie istnieje.
12. Czy istnieje homomorfizm pierścieni  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ ?

### Pierścienie kwadratowe

Niech  $d$  oznacza liczbę całkowitą bezkwadratową, tzn. nie dzielącą się przez kwadrat żadnej liczby pierwszej. Definiujemy  $\omega_d$  jako  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$  jeśli  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , a jako  $\sqrt{d}$  w przeciwnym przypadku.

13. Sprawdź, że  $\mathbf{Z}[\omega_d]$  jest pierścieniem.

Dla elementu  $r + s\sqrt{d} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d}) = \{r + s\sqrt{d} \mid r, s \in \mathbf{Q}\}$  określamy *sprzężenie* jako  $\overline{r + s\sqrt{d}} = r - \sqrt{d}$  oraz *normę* jako  $N(r + s\sqrt{d}) = (r + s\sqrt{d})(r - s\sqrt{d}) = r^2 - ds^2$ .

14. Zauważ, że dla  $d < 0$  sprzężenie pokrywa się z zespolonym sprzężeniem, zaś norma z kwadratem modułu. Uzasadnij, że dla  $d > 0$  norma niezerowego elementu  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$  jest niezerowa, choć bywa ujemna.
15. Uzasadnij, że dla  $z \in \mathbf{Z}[\omega_d]$  mamy  $N(z) \in \mathbf{Z}$ .
16. Niech  $\omega \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ . Uzasadnij, że następujące warunki są równoważne:
  - a)  $\mathbf{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$  jest pierścieniem;
  - b)  $\omega^2 + m\omega + n = 0$  dla pewnych  $m, n \in \mathbf{Z}$ ;
  - c)  $\omega \in \mathbf{Z}[\omega_d]$ .
17. Uzasadnij, że  $\mathcal{U}(\mathbf{Z}[\omega_d]) = \{z \in \mathbf{Z}[\omega_d] \mid N(z) = \pm 1\}$ .
18. Dla  $d < 0$  wyznacz  $\mathcal{U}(\mathbf{Z}[\omega_d])$  (w zależności od  $d$ ).
19. Udowodnij, że  $\mathcal{U}(\mathbf{Z}[\sqrt{2}]) = \{\pm(1 - \sqrt{2})^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ .
20. Niech  $z \in \mathbf{Z}[\omega_d]$ , i niech  $N(z) = p$  będzie liczbą pierwszą. Uzasadnij, że  $z$  jest nierozkładalny w  $\mathbf{Z}[\omega_d]$ .
21. Podaj przykład elementu  $z \in \mathbf{Z}[i]$  który jest nierozkładalny, mimo że  $N(z)$  nie jest liczbą pierwszą.