

Kraty w $\mathbf{R}^n$.

Podgrupę Λ przestrzeni euklidesowej V (z dodawaniem jako działaniem) zowie się *dyskretną*, jeśli w pewnej kuli wokół zera nie ma niezerowych elementów tej podgrupy. Dyskretna podgrupa pozostanie taką po dowolnej zmianie iloczynu skalarnego; jest więc sens mówić o dyskretnej podgrupie skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbf{R}$ (zad.).

Jeśli kula wokół zera, o której mowa w definicji, ma promień r , to kule o promieniu $r/2$ wokół różnych elementów Λ są rozłączne. Stąd wynika, że ograniczony podzbiór V ma skończony przekrój z Λ . Stąd wnioskujemy dalej, że w (nietrywialnej) Λ istnieje wektor niezerowy o minimalnej długości.

Tw. *Dyskretna podgrupa $\mathbf{R}^2$ jest postaci $\{0\}$, $\mathbf{Z}v$ (dla niezerowego v) lub $\mathbf{Z}v + \mathbf{Z}w$ (dla lnz v, w).*

Za v wybieramy najkrótszy niezerowy wektor Λ ; wtedy $\text{Lin}(v) \cap \Lambda = \mathbf{Z}v$, i za w bierzemy wektor spoza $\text{Lin}(v)$ leżący najbliżej $\text{Lin}(v)$.

Wniosek: nietrywialna podgrupa $\mathbf{Z}^2$ jest izomorficzna z $\mathbf{Z}$ lub $\mathbf{Z}^2$. W $\mathbf{R}^n$ dyskretna podgrupa składa się z całkowitoliczbowych kombinacji liniowych co najwyżej n lnz wektorów (zad.).

Krystalografia

Grupa $I_+(\mathbf{R}^2)$ parzystych izometrii $\mathbf{R}^2$ jest produktem półprostym grupy translacji (izomorficznej z samym $\mathbf{R}^2$) i grupy obrotów $SO(2)$. Działanie to po prostu definiujące działanie $SO(2)$ na $\mathbf{R}^2$.

Podgrupę Γ grupy $I_+(\mathbf{R}^2)$ nazywamy dyskretną, jeśli nie ma w niej translacji o krótkie wektory ani obrotów o małe kąty. Obraz $\bar{\Gamma}$ grupy Γ w $SO(2)$ (obraz przez ilorazowe odwzorowanie $I_+(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2 \rtimes SO(2) \rightarrow SO(2)$) jest dyskretny, więc skończony i cykliczny, powiedzmy rzędu n .

Tw. *Jeśli w Γ są nietrywialne translacje, to $n = 1, 2, 3, 4$ lub 6 .*

Po pierwsze, część translacyjna grupy Γ , tzn. $\Lambda = \Gamma \cap \mathbf{R}^2$ jest dyskretna w $\mathbf{R}^2$ i zachowywana przez $\bar{\Gamma}$. Najkrótszy wektor $\Lambda \setminus \{0\}$ jest bliżej zera niż swych obrazów przez $\bar{\Gamma}$, stąd $n \leq 6$. Wykluczamy 5 patrząc na długość sumy najkrótszego niezerowego wektora Λ i jego obrazu przez obrót o $4\pi/5$.

Skończone podgrupy $SO(3)$.

Powiedzmy, że taka skończona grupa G ma n elementów. Zbiór osi nietrywialnych elementów G jest G -niezmienniczy; wygodniej rozważać bieguny, tzn. punkty przecięcia osi ze sferą jednostkową (wygodniej, bo na osi jej stabilizator może działać nietrywialnie). Jeśli r_x to rząd stabilizatora bieguna x , to suma liczb $r_x - 1$ (po wszystkich x) daje $2(n - 1)$. Grupując bieguny w G -orbitę i dzieląc przez n dostajemy

$$\sum_i (1 - \frac{1}{r_i}) = 2 - \frac{2}{n}.$$

Składniki po lewej są co najmniej $1/2$, po prawej stoi mniej niż 2 ; zatem orbit może być:

- jedna: sprzeczność arytmetyczna;
- dwie: G jest cykliczna, kręci wokół jednej osi;
- trzy: możliwe układy r_i to $(2, 2, n/2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ i $(2, 3, 5)$. Odpowiadają grupom: diedralnej, tetraedralnej, oktaedralnej i dodekaedralnej.

Izomorficzność i prostota grupy ikosaedralnej i A_5 .

Grupa $\mathbf{I}$ obrotów 12-ścianu ma 60 elementów, które rozmieszczają się w pięciu klasach sprzężoności wedle swych kątów obrotu:

$$60 = 1 + 12 + 12 + 15 + 20.$$

Żadna podsuma prawej strony (ze składnikiem 1) nie daje dzielnika liczby 60; zatem grupa ikosaedralna jest *prosta*: nie ma nietrywialnego właściwego dzielnika normalnego.

W dwunastościan można wpisać 5 sześciątów (zaczynając od dowolnej przekątnej ściany). $\mathbf{I}$ nietrywialnie działa na tym zbiorze pięciu sześciątów: dostajemy nietrywialny homomorfizm $\phi: \mathbf{I} \rightarrow S_5$. Musi on być 1-1 (z powodu prostoty dziedziny ma trywialne jądro); ma obraz w A_5 (przeciwwobraz A_5 jest normalnym dzielnikiem dziedziny). Ale $|\mathbf{I}| = |A_5| = 60$; w konsekwencji: ϕ jest izomorfizmem, A_5 jest prosta.