

Pozdzbior S pierścienia R nazywamy *multiplikatywnym*, jeśli jest zamknięty na mnożenie i jeśli $1 \in S$. *Lokalizacja* pierścienia R względem takiego zbioru to pierścień ułamków $S^{-1}R = \{\frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S\}$, w którym $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \iff s''(rs' - r's) = 0$ dla pewnego $s'' \in S$. Można też lokalizować R -moduł M , dostając $S^{-1}R$ -moduł $S^{-1}M$ (którego elementy to ułamki postaci $\frac{m}{s}$, z analogiczną jak wyżej dokładnością).

Przykłady.

- $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ jest zbiorem multiplikatywnym.
- Jeśli $p \triangleleft R$ jest ideałem pierwszym, to $R \setminus p$ jest multiplikatywny. Lokalizację $(R \setminus p)^{-1}R$ oznaczamy R_p i nazywamy lokalizacją R w ideałem pierwszym p .
- Niech $R = C[-1, 1]$, i niech $m = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$. Wtedy R_m jest pierścieniem kielków (w zerze) funkcji ciągłych.
- Jeśli R jest dziedziną, to $S = R \setminus \{0\}$ jest multiplikatywny, a $S^{-1}R = R_0$ jest ciałem ułamków R . Inne lokalizacje dziedziny można traktować jak podpierścienie ciała ułamków.

Przełomowa idea Grothendiecka: każdy pierścień jest w pewnym sensie pierścieniem funkcji na zbiorze swych ideałów pierwszych (zwanym *spektrum* pierścienia). Lokalizacja w ideałem pierwszym dostarcza pierścienia kielków w odpowiednim punkcie spektrum. Dzięki tej idei można badać pewne własności pierścieni, modułów i homomorfizmów lokalnie. Np. niezerowość jest własnością lokalną:

Fakt. (M – R -moduł.) $M \neq 0 \iff$ dla każdego ideału maksymalnego $m \triangleleft R$ zachodzi $M_m \neq 0$.

Jeśli bowiem moduł jest niezerowy, to ma niezerowy element x . Anihilator takiego elementu $\text{ann}(x) = \{r \in R \mid rx = 0\}$ jest ideałem R , zawartym w pewnym ideałem maksymalnym m . Ale $\frac{x}{1} \neq 0$ w M_m .

Lokalizować można też homomorfizmy. Homomorfizm R -modułów $\phi: A \rightarrow B$ indukuje homomorfizm $S^{-1}R$ -modułów:

$$S^{-1}\phi: S^{-1}A \ni \frac{a}{s} \mapsto \frac{\phi(a)}{s} \in S^{-1}B.$$

Fakt. Jeśli $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$ jest ciągiem dokładnym, to ciąg S -lokalizacji $A' \xrightarrow{\phi'} B' \xrightarrow{\psi'} C'$ też jest dokładny. (Dokładność oznacza $\ker \psi = \text{im } \phi$.)

$\ker \psi' \subseteq \text{im } \phi'$: jeśli $\psi'(\frac{b}{s}) = 0$, to $s'\psi(b) = 0$ dla pewnego $s' \in S$. Wtedy $\psi(s'b) = 0$, a więc $s'b = \phi(a)$ dla pewnego $a \in A$. Ostatecznie $\frac{b}{s} = \frac{\phi(a)}{ss'} \in \text{im } \phi'$.

Wniosek. Niech $\phi: A \rightarrow B$ będzie homomorfizmem R -modułów.

ϕ jest mono/epi/izo $\iff$ dla każdego maksymalnego $m \triangleleft R$ lokalizacja ϕ_m jest mono/epi/izo.

Wystarczy rozważyć ciąg dokładny i jego lokalizację:

$$0 \rightarrow \ker \phi \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/\text{im } \phi \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow (\ker \phi)_m \rightarrow A_m \rightarrow B_m \rightarrow (B/\text{im } \phi)_m \rightarrow 0$$

Chińskie twierdzenie o resztach.

Założmy, że $Q_1, \dots, Q_n \triangleleft R$, i że $Q_i + Q_j = R$ dla każdej pary $i \neq j$. Wtedy $R/\bigcap_i Q_i \simeq \bigoplus_i R/Q_i$.

Dowód: Homomorfizm $\phi: R \rightarrow \bigoplus_i R/Q_i$ ma jądro $\bigcap_i Q_i$. Uzasadnimy, że ϕ jest epi, pokazując że ϕ_m jest epi dla każdego maksymalnego $m \triangleleft R$. Zauważmy, że $(R/Q_j)_m = 0$ jeśli $Q_j \not\subseteq m$. W takim razie najwyżej jedno $(R/Q_i)_m$ jest niezerowe, i $\phi_m: R_m \rightarrow (R/Q_i)_m$ jest epi (jako lokalizacja $R \rightarrow R/Q_i$).

Pierścień lokalny.

Pierścień lokalny to pierścień, który ma jeden ideał maksymalny. Lokalizacja pierścienia w jego ideałem pierwszym ma tę własność. Inny przykład to pierścień szeregów formalnych $K[[X]]$.

Lemat Nakayamy. Niech R będzie pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym m , zaś M skończenie generowanym modulem nad R . Jeśli $M = mM$, to $M = 0$.

Dowód. Weźmy minimalny zbiór $\{x_1, \dots, x_n\}$ generujący M . Wtedy $x_n = \sum_i m_i x_i$; stąd $(1 - m_n)x_n = \sum_{i < n} m_i x_i$. Ale $1 - m_n$ jest odwracalny w R (bo $\notin m$), zatem $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ generuje M – sprzeczność.

Wnioski.

- R, M jak w lemacie Nakayamy, $x_1, \dots, x_n \in M$. Jeśli obrazy elementów $x_1, \dots, x_n$ w M/mM tworzą bazę tej przestrzeni liniowej nad ciałem R/m , to $x_1, \dots, x_n$ generują M .

- (Niech N będzie podmodułem M generowanym przez $x_1, \dots, x_n$. Mamy $m(M/N) = M/N$.)
- Niech A, B będą skończenie generowanymi modułami nad pierścieniem lokalnym R , a $\phi: A \rightarrow B$ niech będzie homomorfizmem. ϕ jest epi $\iff$ homomorfizm $A/mA \rightarrow B/mB$ indukowany przez ϕ jest epi. (Ciąg dokładny $A \xrightarrow{\phi} B \rightarrow C \rightarrow 0$ indukuje ciąg dokładny $A/mA \rightarrow B/mB \rightarrow C/mC \rightarrow 0$.)