

Pierścień nazywamy *noetherowskim*, jeśli każdy jego ideał jest skończenie generowany. Takie są np. PID-y i ciała; kontrprzykładem jest pierścień $C(\mathbf{R})$ i jego ideał $C_c(\mathbf{R})$. Noetherowskość pierścienia jest równoważna temu, że każdy wstępujący ciąg jego ideałów stabilizuje się. Istotnie, suma takiego ciągu jest ideałem, więc jest generowana przez skończony układ swych elementów, w całości zawarty w dostatecznie dalekim składniku sumy – od tego składnika następuje stabilizacja. Odwrotnie, ideał bez skończonego układu generatorów zawiera niestabilizujący się ciąg ideałów: wystarczy w nim wybrać ciąg elementów, z których żaden nie leży w ideale generowanym przez poprzednie elementy.

Własność stabilizacji rosnących ciągów ideałów implikuje istnienie rozkładu elementów pierścienia na czynniki nierozkładalne (tak jak dla PID).

Tw. Hilberta o bazie.

Jeśli R jest noetherowski, to $R[X]$ też jest noetherowski.

Dowód. Niech $I \triangleleft R[X]$. Określmy ciąg ideałów $I_n \triangleleft R$ następująco: I_n składa się z wszystkich możliwych współczynników przy X^n w wielomianach stopnia n należących do I . Ten ciąg ideałów jest rosnący i stabilizuje się. Każdy I_n jest też skończenie generowany – wybieramy skończony układ jego generatorów, i bierzemy odpowiadające mu wielomiany. Czyniąc tak od $n = 0$ do wartości n od której następuje stabilizacja ciągu I_n dostajemy skończony układ wielomianów generujący I .

Przez indukcję wnioskujemy, że $K[X_1, \dots, X_n]$ jest noetherowski.

Standardowa konsekwencja: jeśli zbiór $V \subseteq K^n$ jest zadany układem równań wielomianowych, to można go też zadać skończonym układem równań wielomianowych (wystarczy wziąć generatory ideału $I(V) = \{P \in K[X_1, \dots, X_n] \mid P|_V = 0\}$).

Algebra wielomianów niezmienniczych.

W czasach Hilberta “baza” oznaczała prawdopodobnie skończony zbiór generatorów. Tak naprawdę Hilbert interesował się algebrą wielomianów niezmienniczych. Załóżmy, że skończona grupa G działa przez przekształcenia liniowe na $V = K^n$. (Zakładamy też, że rząd grupy nie dzieli charakterystyki K .) Wtedy G działa też na pierścieniu $S = K[X_1, \dots, X_n]$, a mianowicie $(gP)(X_1, \dots, X_n) = P(g^{-1}(X_1, \dots, X_n))$. W takiej sytuacji *algebrę niezmienników* określamy jako $S^G = \{P \in S \mid gP = P\}$. Pytanie: czy ta algebra jest skończenie generowana.

Przykład. Grupa permutacji S_n działa na K^n permutując osie. Wielomiany niezmiennicze w tej sytuacji nazywamy wielomianami symetrycznymi; są to wielomiany, które nie zmieniają się przy permutowaniu zmiennych. Dla $k \leq n$ określamy σ_k jako sumę wszystkich możliwych iloczynów k różnych zmiennych. Okazuje się, że każdy wielomian symetryczny daje się jednoznacznie wyrazić jako wielomian od tych σ_k .

Inne podobne przykłady były równie konkretnie wyliczane w XIX wieku. Poniższe rozumowanie Hilberta jest bardzo ogólne (jego warianty obejmują pewne grupy nieskończone) i zupełnie niekonstrukttywne.

Tw. Algebra niezmienników liniowego działania skończonej grupy G na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad K jest skończenie generowaną K -algebrą (o ile $|G|$ nie dzieli charakterystyki K).

Dowód. Wielomian jest niezmienniczy $\iff$ każda jego składowa jednorodna jest niezmiennicza. Niech I oznacza ideał S^G generowany przez jednorodne elementy dodatniego stopnia, zaś J niech będzie ideałem S generowanym przez I . Ideał J ma skończony układ generatorów F złożony z jednorodnych elementów I (wystarczy generatory J wyrazić przez generatory I). Pokażemy, że F generuje S^G jako K -algebrę.

Określamy operator Reynoldsa (uśredniania po G) $R: S \ni f \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf \in S^G$. Niech $P \in S^G$ będzie jednorodny. Pokażemy, indukcyjnie względem stopnia P , że P wyraża się wielomianowo względem elementów F . Skoro $P \in I \subseteq J$, to $P = \sum_{f \in F} A_f f$ dla pewnych $A_f \in S$, jednorodnych stopnia mniejszego niż stopień P . Wtedy jednak $P = R(P) = \sum_{f \in F} R(A_f) f$, gdzie $R(A_f)$ wyraża się wielomianowo względem F z założenia indukcyjnego.