

Abelianizacja.

Abelianizacja grupy to jej maksymalny abelowy iloraz. Jeśli grupa jest zadana prezentacją, to abelianizację uzyskujemy dopisując relacje mówiące że każde dwa generatory komutują. Np. $F_n^{\text{ab}} \simeq \mathbf{Z}^n$. Nieco ciekawszy przykład: $\langle x, y \mid xy = y^2x \rangle^{\text{ab}} = \langle x, y \mid xy = y^2x, xy = yx \rangle = \langle x \mid \rangle \simeq \mathbf{Z}$.

Przemienność x i y jest równoważna trywialności ich *komutatora*, czyli elementu $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Każdy komutator leży w jądrze dowolnego homomorfizmu w grupę abelową. Jądro takie zawiera więc *komutant* grupy G : podgrupę generowaną przez wszystkie komutatory, którą oznaczamy $[G, G]$ lub G' .

Lemat. Komutant jest dzielnikiem normalnym.

Istotnie, dla dowolnego automorfizmu ϕ naszej grupy mamy $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$. W szczególności jest tak dla automorfizmów wewnętrznych.

Abelianizację definiujemy jako iloraz: $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$; rozumiemy ją też jako odwzorowanie ilorazowe $G \rightarrow G^{\text{ab}}$.

Abelianizacja jest scharakteryzowana przez następującą własność uniwersalną: każdy homomorfizm z G w grupę abelową faktoryzuje się jednoznacznie przez odwzorowanie abelianizacji $G \rightarrow G^{\text{ab}}$.

Przykłady komutantów.

1. $SL_n(K)$. Dla $n \geq 3$ grupa ta jest generowana przez macierze $I + E_{ij}(a)$, $a \in K$, $i \neq j$. Łatwo sprawdzić, że $(I + E_{ij}(a))^{-1} = I + E_{ij}(-a)$, i że $[I + E_{ij}(a), I + E_{jk}(b)] = I + E_{ik}(ab)$. Stąd wynika, że dla $n \geq 3$ grupa $SL_n(K)$ jest równa swojemu komutantowi.

2. S_n . Każdy komutator jest permutacją parzystą, więc komutant zawiera się w A_n . Dla $n \neq 5$ grupa A_n jest prosta, a S_n nieabelowa, więc wtedy $[S_n, S_n] = A_n$.

3. S_4 . Wiemy, że $S_4' < A_4$. Grupa A_4 jest izomorficzna z grupą tetraedralną $\mathbf{T}$, która dopuszcza nietrywialny homomorfizm w S_3 : działanie $\mathbf{T}$ na 3-elementowym zbiorze par przeciwległych krawędzi czworokąta. Jądrem tego homomorfizmu jest 4-elementowa grupa Kleina K . Mamy więc $1 \triangleleft K \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$, przy czym ilorazy kolejnych wyrazów są abelowe.

Rozwiązalność.

Def. Grupa G jest *rozwiązalna*, jeśli ma skończony ciąg podgrup $1 = H_n \triangleleft \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$, taki że wszystkie ilorazy H_i/H_{i+1} są abelowe.

Grupy abelowe są rozwiązalne. Niecykliczne grupy proste nie są rozwiązalne.

Fakt.

Następujące warunki są równoważne:

- 1) Grupa G jest rozwiązalna.
- 2) Niech $G_1 = [G, G]$, $G_{i+1} = [G_i, G_i]$. Istnieje n , takie że $G_n = 1$.
- 3) Grupa G albo jest abelowa, albo ma właściwy nietrywialny dzielnik normalny H , taki że H i G/H są rozwiązalne.

$1 \Rightarrow 2$: sprawdzamy indukcyjnie, że $G_i < H_i$. Złożenie $G_i \rightarrow H_i \rightarrow H_i/H_{i+1}$ jest homomorfizmem w grupę abelową, więc jego jądro zawiera G_{i+1} ; tzn. $G_{i+1} < H_{i+1}$.

$2 \Rightarrow 3$: $H = [G, G]$.

$3 \Rightarrow 1$: Ciąg podgrup świadczący o rozwiązalności H przedłużamy ciągiem podgrup świadczącym o rozwiązalności G/H cofniętym do G przez homomorfizm ilorazowy $G \rightarrow G/H$.

Wniosek. Skończona p -grupa jest rozwiązalna.

Indukcja względem rzędu: iloraz przez nietrywialne centrum jest rozwiązalny.

Prostota $PSL(n, q)$.

Niech $G = PSL(n, q)$ (gdzie q to potęga liczby pierwszej). Ta grupa wiernie i 2-tranzytywnie działa na przestrzeni rzutowej $P^{n-1}(q)$ – zbiorze 1-wymiarowych podprzestrzeni liniowych przestrzeni $\mathbf{F}_q^n$.

Niech $1 \neq N \triangleleft G$.

Lemat 1. Działanie N na $\mathbf{P}^{n-1}$ jest tranzytywne.

Skoro działanie G jest wierne, to N ma nietrywialną orbitę Nx . Niech $y = nx \neq x$. Weźmy dowolne $z \neq x$; wtedy istnieje $g \in G$, takie że $gx = x$, $gy = z$. Wówczas $z = gy = gn x = gng^{-1}gx = n'x$.

Niech Q oznacza stabilizator punktu $\mathbf{P}^{n-1}$ zadanego przez pierwszą oś $\mathbf{F}_q^n$.

Wniosek. $G = NQ$.

Niech $U = \langle I + E_{12}(a_2) + \dots + E_{1n}(a_n) \mid a_2, \dots, a_n \in \mathbf{F}_q \rangle$. Grupa U jest dzielnikiem normalnym Q , zatem:

Lemat 2. $NU \triangleleft NQ = G$.

Lemat 3. $NU = G$.

Istotnie, $NU \supseteq \langle \langle I + E_{12}(a) \mid a \in \mathbf{F}_q \rangle \rangle \supseteq \langle I + E_{ij}(a) \mid i \neq j, a \in \mathbf{F}_q \rangle = G$.

Teraz zaobserwujemy, że $G/N \simeq NU/N \simeq U/(N \cap U)$ jest abelowa, zatem $[G, G] < N$. Ale $[G, G] = G$, poza przypadkami $PSL(2, 2)$ i $PSL(2, 3)$.

Tw. Grupa $PSL(n, q)$ jest prosta, poza przypadkami $(n, q) = (2, 2), (2, 3)$.