

Ćwiczenia

1. Udowodnij, że każdy element grupy $\langle a, b \mid a^2, b^7, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ da się zapisać w postaci $a^k b^\ell$; wywnioskuj, że rozważana grupa jest skończona.
2. Jeśli każdy element $g \in G$ spełnia $g^2 = e$, to G jest abelowa.
3. Znajdź komutant i abelianizację grupy $GL_n(K)$ dla $n \geq 3$.
4. Sprawdź, że jeśli $\varphi: G \rightarrow H$ jest homomorfizmem, a $N \triangleleft H$, to $\varphi^{-1}(N) \triangleleft G$.
5. Uzasadnij, że każda grupa rzędu < 60 jest rozwiązalna.
6. Sprawdź, że $\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & (a^2 - 1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadania

7. Udowodnij, że proces redukcji słowa w prowadzi zawsze do tego samego słowa zredukowanego (zależnego od w , ale nie od kolejności dokonywania redukcji).
8. Grupę wolną o n generatorach można zdefiniować tak: Rozważamy $\prod_{(G,f)} G$, gdzie produkt jest wzięty po wszystkich parach (G, f) , takich że G jest grupą, a f funkcją z $\{1, 2, \dots, n\}$ w G . W tym produkcie wyróżniamy elementy $x_i = (f(i))_{(G,f)}$, a następnie rozpinamy na nich podgrupę: $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.
 - a) Udowodnij, że F_n ma własność uniwersalną: dla dowolnej grupy G i dowolnego ciągu jej elementów $(a_1, \dots, a_n)$ istnieje jedyny homomorfizm $F_n \rightarrow G$ posyłający x_1 w $a_1, \dots, x_n$ w a_n .
 - b) Przedyskutuj problemy teoriomnogościowe z definicją F_n . Wyłumacz, jak je ominąć.
9. Niech $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.
 - a) Uzasadnij, że dla dowolnych dwóch domkniętych rozłącznych przedziałów $I = [i_1, i_2], J = [j_1, j_2] \subseteq \mathbf{R}$ istnieje homografia $h_{I,J}: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc = 1$, taka że $h_{I,J}(\overline{\mathbf{R}} \setminus I) = (j_1, j_2)$.
 - b) Niech $I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_n \subseteq \mathbf{R}$ będą domkniętymi, parami rozłącznymi przedziałami. Uzasadnij, że $\langle h_{I_1, J_1}, \dots, h_{I_n, J_n} \rangle$ jest wolną podgrupą $PSL_2(\mathbf{R})$.
10. Udowodnij, że w grupie wolnej nie ma nietrywialnych elementów skończonego rzędu.
11. Udowodnij, że dwa komutujące elementy grupy wolnej należą do pewnej podgrupy cyklicznej.
12. Udowodnij, że słowo w nad alfabetem X wyznacza element komutanta grupy wolnej F_X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej litery $x \in X$ suma wykładników wszystkich wystąpień x w w jest równa 0.
13. Udowodnij, że następujące macierze generują wolną podgrupę F grupy $SO(3)$:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

14. Pokaż, że skończenia generowana grupa:
 - ma skończenie wiele homomorfizmów w S_n ;
 - ma skończenie wiele podgrup indeksu n .
15. Podgrupa skończonego indeksu w grupie skończenia generowanej jest skończenie generowana - tak czy nie?
16. Wykaż, że $\langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^2 \rangle \simeq S_3$.
17. Udowodnij, że komutant grupy wolnej $F_{\{x,y\}}$ jest równy $\langle \langle xyx^{-1}y^{-1} \rangle \rangle$.
18. Wyznacz komutant grupy wszystkich izometrii płaszczyzny. Sprawdź, że jest to grupa rozwiązalna.
19. Uzasadnij, że grupa $SL_n(K)$ jest generowana przez $\{I + E_{ij}(a) \mid i \neq j, a \in K\}$.
20. Wyznacz komutant grupy $SL_2(K)$.
21. Sprawdź, że grupa T górnótrójkątnych odwracalnych macierzy $n \times n$ jest rozwiązalna.
22. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi.

- a) Udowodnij, że grupa rzędu pq jest rozwiązalna.
 - b) Udowodnij, że grupa rzędu pq^2 jest rozwiązalna.
 - z) Udowodnij, że grupa rzędu pq^z jest rozwiązalna.
23. Wyznacz komutant grupy A_4 .
24. Sprawdź, że $PSL(2, 2) \simeq S_3$, $PSL(2, 3) \simeq A_4$.
25. Udowodnij, że $PSL(2, 5) \simeq A_5$.
26. W zadaniu 20 z listy 4 pojawiło się kilka grup rzędu 120. Czy któraś z nich jest izomorficzna z $SL(2, 5)$? Z $PGL(2, 5)$?

Grupy nilpotentne

Dla $A, B \subseteq G$ definiujemy $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$.

27. Grupę G nazywamy *nilpotentną*, jeśli istnieje ciąg jej (!) dzielników normalnych $1 = H_n < H_{n-1} < \dots < H_0 = G$, taki że $H_i/H_{i+1} < Z(G/H_{i+1})$. Udowodnij, że ten warunek jest równoważny następującemu: Niech $G_1 = [G, G]$, $G_{i+1} = [G, G_i]$; istnieje n , takie że $G_n = 1$.
28. Sprawdź, że grupa macierzy górnotrójkątnych z jedynkami na przekątnej jest nilpotentna.
29. Sprawdź, że grupa nilpotentna jest rozwiązalna.
30. Uzasadnij, że skończona p -grupa jest nilpotentna.
31. Udowodnij, że normalizator podgrupy Sylowa jest równy swemu normalizatorowi.
32. Udowodnij, że w grupie nilpotentnej właściwa podgrupa jest istotnie mniejsza od swego normalizatora.
33. Udowodnij, że skończona grupa nilpotentna jest produktem swych podgrup Sylowa.

Rozkład paradoksalny

34. Rozważ działanie grupy F z zadania 13 na sferze jednostkowej S^2 . Uzasadnij, że orbita punktu z nietrywialnym stabilizatorem składa się z punktów z nietrywialnym stabilizatorem. Uzasadnij, że zbiór R punktów o nietrywialnym stabilizatorze jest sumą przeliczalnie wielu przeliczalnych orbit.
35. (Paradoksalny rozkład grupy wolnej.) W grupie $F_2 = F_{\{x, y\}}$ wyróżniamy podzbiory: A : słowa zaczynające się na x ; B : słowa zaczynające się na x^{-1} ; C : słowa zaczynające się na y niebędące potęgą y ; D : cała reszta. Uzasadnij, że $F_2 = A \cup xB = C \cup yD$, przy czym każda z sum jest sumą rozłączną.
- Mówimy, że zbiory $U, V \subseteq \mathbf{R}^3$ są *równoważne przez rozkład*, jeśli U da się rozłożyć na sumę rozłączną skończenie wielu zbiorów, których obrazy przez stosownie dobrane izometrie $\mathbf{R}^3$ sumują się rozłącznie do V .
36. (Paradoksalny rozkład sfery i kuli.) Połącz poprzednie dwa zadania.
- a) Uzasadnij, że po usunięciu z S^2 przeliczalnego zbioru R można rozbić resztę na rozłączną sumę $A' \cup B' \cup C' \cup D'$, tak że $S^2 \setminus R = A' \cup x(B') = C' \cup y(D')$.
 - b) Uzasadnij, że dla dowolnego przeliczalnego $R \subseteq S^2$ istnieje obrót $r \in SO(3)$, taki że zbiory $R, r(R), r^2(R), \dots$ są parami rozłączne. Wywnioskuj stąd, że można rozbić S^2 na rozłączną sumę $R \cup E \cup F$, tak by cała sfera S^2 była rozłączną sumą $r^{-1}(E) \cup F$. (Inaczej mówiąc: S^2 i $S^2 \setminus R$ są równoważne przez rozkład.)
 - c) Uzasadnij, że S^2 można przedstawić w postaci sumy rozłącznej dwóch zbiorów, z których każdy jest równoważny przez rozkład z S^2 .
 - d) Uzasadnij, że kula o promieniu 1 w $\mathbf{R}^3$ jest równoważna przez rozkład z sumą dwóch rozłącznych kul o promieniu 1.