

Algebra liniowa 1R, Lista 1

- Oblicz i zaznacz w układzie współrzędnych A , B , $A + B$ i $-2A + 3B$.
(a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Napisz równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt A w kierunku wektora U . Naszkicuj w układzie współrzędnych.
(a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i prostopadłej do wektora $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Znajdź cztery wektory U , takie że $\langle U, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$.
 - Znajdź $P_U(V)$ i $P_V(U)$ gdy (a) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
-
- Znajdź punkt przecięcia prostych
(a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $2x + y = 3$, (b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Napisz parametryczne równania prostej przechodzącej przez punkty A i B , w postaci wektorowej i we współrzędnych. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 - Napisz nieparametryczne równania prostych z poprzedniego ćwiczenia.
 - Czy punkt a) $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; leży na prostej $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?
 - Napisz we współrzędnych parametryczne równanie prostej
(a) $y = 2x - 1$, (b) $y = 7$, (c) $x = -1$, (d) $2x + 3y = 5$.
 - Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka równoległoboku, którego trzema wierzchołkami są $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Uwaga: jest kilka możliwości; znajdź wszystkie.
 - Uzasadnij, że proste $y = ax + b$ i $y = cx + d$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy gdy $ac = -1$.
 - Znajdź kąt między środkowymi trójkąta ABC poprowadzonymi z wierzchołków A i C wiedząc że $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
 - Dane są współrzędne punktów P, Q, R będących środkami boków trójkąta ABC . Znajdź współrzędne punktów A, B, C . Rachunki warto przeprowadzić na wektorach wodzących.
 - Niech ℓ będzie prostą, zaś p tym punktem na prostej ℓ który leży najbliżej początku układu współrzędnych. Uzasadnij, że wektor wodzący punktu p jest prostopadły do ℓ .
 - Używając poprzedniego zadania znajdź odległość punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ od prostej $-2x + 5y = 7$.
 - Wyprowadź wzór na odległość punktu $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ od prostej
(a) $ax + by = 0$, (b) $ax + by = c$, (c) $X = B + tU$, gdzie $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.
 - Niech U i V będą wektorami wodzącymi końców pewnego odcinka. Zapisz, w terminach wektorów U i V , wektor wodzący punktu dzielącego dany odcinek w stosunku 2:1. Uogólnij.
-
- Znajdź współrzędne punktu, w którym promień światła biegnący od punktu $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ musi odbić się od osi OX (zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia) aby dotrzeć do punktu
(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix}$.
 - W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt opuszczenia (spodek) wysokości z wierzchołka C na bok AB .
 - Udowodnij, że przekątne dowolnego rombu są prostopadłe.
 - Udowodnij, że kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty.
 - Udowodnij (najlepiej na kilka sposobów), że dla dowolnych U, V zachodzi nierówność: $|\langle U, V \rangle| \leq \|U\| \|V\|$. Kiedy w tej nierówności zachodzi równość? Wywnioskuj, że dla dowolnych U, V zachodzi nierówność: $\|U + V\| \leq \|U\| + \|V\|$.