

Algebra liniowa 1R, Lista 10

- Zauważ, że jeśli pewne dwa spośród wektorów $X_1, \dots, X_l$ są równe, to $X_1, \dots, X_l$ są lz.
- Sprawdź na możliwie wiele różnych sposobów czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne:
(a) $(1, 1, 0)^\top, (0, 1, 1)^\top, (1, 0, 1)^\top$; (b) $(1, 0, 1)^\top, (0, 1, 0)^\top$; (c) $(1, 2, -3)^\top, (-1, -1, 2)^\top, (3, -2, -1)^\top$.
- Udowodnij wszelkie sformułowane ale nieudowodnione na wykładzie rachunkowe własności wyznacznika.
- Wylicz wzór $\det(M) = \det(M^\top)$ (dla macierzy 3×3).
- Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & x & -1 \\ c & 0 & x \end{vmatrix}.$$

- Niech $k < l$. Uzasadnij, że (a) jeśli $X_1, \dots, X_l$ są lnz, to $X_1, \dots, X_k$ są lnz; (b) jeśli $X_1, \dots, X_k$ są lz, to $X_1, \dots, X_l$ są lz.
- Udowodnij, że dowolne 4 wektory w $\mathbf{R}^3$ są lz.
- Które z następujących warunków są równoważne liniowej niezależności wektorów $X_1, X_2, X_3 \in \mathbf{R}^3$?
Podaj dowód równoważności lub kontrprzykład.
a) żadne dwa spośród X_1, X_2, X_3 nie są współliniowe.
b) X_1 nie jest kombinacją liniową X_2, X_3 ; X_2 nie jest kombinacją liniową X_1, X_3 ; ponadto $X_3 \neq 0$.
- Udowodnij, że jeśli $X \perp Y \perp Z \perp X$ oraz $X, Y, Z \neq 0$, to X, Y, Z są lnz.
- Przedstaw pierwszy z podanych wektorów w postaci kombinacji liniowej pozostałych (lub stwierdź, że się nie da):
(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$;
(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;
- O wektorze U wiadomo, że: (1) jest wektorem wodzącym punktu leżącego na płaszczyźnie $x - y + 2z + 3 = 0$, (2) jest prostopadły do wektora $W = (1, 0, -3)^\top$, (3) równoległością zbudowany na wektorach $U, W, (-2, -1, 1)^\top$ ma objętość 72. Znajdź U .
- Oblicz odległość punktu $(1, 2, 3)^\top$ od (a) prostej $\frac{x-1}{3} = \frac{2y+4}{3} = \frac{z+1}{1}$; (b) płaszczyzny $2x - y + 2 = 5$.
Użyj geometrycznej interpretacji iloczynu wektorowego / wyznacznika.
- Rozwiąż poniższe układy swoim ulubionym sposobem, jak również używając wzorów Cramera.
(a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$
- Wyznacz wielomian $f(x)$ drugiego stopnia, taki że $f(1) = 8, f(-1) = 2, f(2) = 14$.
- Sprawdź, że $\det(A + B, B + C, C + A) = 2 \det(A, B, C)$, $(x - y)(y - z)(z - x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$.
- Sprawdź, czy podane układy wektorów są dodatnio czy ujemnie zorientowane:
(a) $(1, 6, 3)^\top, (-1, 0, 2)^\top, (2, 1, 1)^\top$ (b) $(1, 6, 3)^\top, (2, -1, 1)^\top, (-1, 7, 2)^\top$
- Uzasadnij, że jeśli układ A, B, C jest dodatnio zorientowany, to również układy $-A, -B, C; A + B, B, C$ są dodatnio zorientowane.

- Jaka jest największa możliwa wartość wyznacznika 3×3 , którego każdy wyraz jest równy 0 lub 1?
- Założmy, że każdy wyraz pewnego wyznacznika 3×3 jest co do modułu nie większy niż 1. Udowodnij, że wartość tego wyznacznika jest < 6 . Czy potrafisz wzmocnić tę nierówność?
- Niech $\Psi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie odwzorowaniem liniowym. Pokaż że istnieje wektor $A \in \mathbf{R}^3$ (zależący od Ψ), taki że $\Psi(X) = \langle X, A \rangle$.
- Założmy, że $\Phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ jest 2-liniowa i antysymetryczna. Udowodnij, że istnieje wektor $V \in \mathbf{R}^3$ (zależący od Φ), taki że dla wszystkich $X, Y \in \mathbf{R}^3$ zachodzi $\Phi(X, Y) = \langle X \times Y, V \rangle$.
- Czy da się zrzutować (prostopadle) sześciąt na prostą tak, by rzuty wierzchołków podzieliły tę prostą na 7 odcinków równej długości (i dwie półproste)?